



# Etude de systèmes binaires d'objets compacts : étoiles à neutrons, étoiles de quarks étranges et trous noirs

Francois Limousin

## ► To cite this version:

Francois Limousin. Etude de systèmes binaires d'objets compacts : étoiles à neutrons, étoiles de quarks étranges et trous noirs. Astrophysique [astro-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT : . tel-00067971

**HAL Id: tel-00067971**

**<https://theses.hal.science/tel-00067971>**

Submitted on 9 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale Constituants élémentaires et Systèmes complexes

**THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS VI**

Spécialité :  
**ASTRONOMIE-ASTROPHYSIQUE**

présentée par  
**François Limousin**

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'Université Paris VI

**Étude de systèmes binaires d'objets compacts : étoiles  
à neutrons, étoiles de quarks étranges et trous noirs**

Soutenue le 9 Décembre 2005 devant le jury composé de :

M. Richard	KERNER	Président de jury
M. Eric	GOURGOULHON	Directeur de thèse
M. Luc	BLANCHET	Rapporteur
M. Jörg	FRAUENDIENER	Rapporteur
M. Brandon	CARTER	Examineur
M. Jérôme	MARGUERON	Examineur



---

---

---

## Résumé

La détection des ondes gravitationnelles par les détecteurs interférométriques terrestres, tels que VIRGO ou LIGO, et par la mission spatiale LISA sera fortement facilitée par la connaissance théorique à priori du signal. On s'intéresse dans cette thèse à l'étude d'une des sources de rayonnement gravitationnel les plus importantes, à savoir les systèmes binaires d'objets compacts. Plus précisément, on considère, dans le cadre de la relativité générale, les dernières orbites de la phase de quasi-équilibre. Elles permettent, d'une part, de fournir des données initiales aussi réalistes que possible pour la phase de coalescence et, d'autre part, d'apporter de nombreuses informations sur les objets compacts émetteurs.

Un effort est fait pour améliorer, rendre ces données initiales les plus réalistes possible d'un point de vue astrophysique. Nous avons ainsi construits les premières séquences de binaires d'étoiles de quarks étranges, et ce pour différentes équations d'état. Contrairement au cas d'étoiles à neutrons polytropiques, la séquence se termine par une instabilité dynamique. Nous avons également calculé des configurations de binaires d'étoiles à neutrons à l'aide d'une théorie sans onde allant au delà de l'approximation communément admise de métrique spatiale conformément plate. Les solutions obtenues devraient être plus précises et de meilleures conditions initiales que celles réalisées jusqu'alors. Nous avons enfin étudié, pour des systèmes d'un seul trou noir puis des trous noirs binaires, l'influence de conditions de bords aux horizons provenant du formalisme des horizons isolés et regroupant des ingrédients de quasi-équilibre.

## Discipline

Astronomie et Astrophysique

## Mots-clés

Relativité générale ; Ondes gravitationnelles ; Objets compacts ; Étoiles à neutrons ; Étoiles de quarks étranges ; Trous noirs ; Méthodes spectrales ; Système binaire ; Quasi-équilibre ; Équation d'état ; Dernière orbite stable ; Condition de bord.

**Laboratoire de l'Univers et de ses THéories,  
Observatoire de Paris-Meudon,**

5, place Jules Janssen, 92195 MEUDON Cedex, FRANCE

---

---

## Abstract

The detection of gravitational waves by ground-based laser interferometers, such as VIRGO or LIGO, or in space with LISA will be greatly facilitated by having a prior theoretical knowledge of the signal. In this thesis, we are interested in the most likely source to be detected by the first generation of observatories : a binary system of compact objects. More precisely, we consider, in the general relativity framework, the last orbits of the inspiral phase. It enables us, not only to provide realistic initial data for the merger simulations but also to obtain many informations on the compact objects themselves.

A special effort is devoted to the improvement of those initial data, to make them as realistic as possible, from an astrophysical point of view. We thus built the first sequences of binary strange quarks stars, and this for various equations of state. Contrary to the case of polytropic neutron stars, the sequence ends at the dynamical instability. We have also calculated configurations of binary neutron stars using a waveless theory going beyond the commonly assumed approximation of a conformally flat spatial metric. We expect the obtained solutions to be more realistic and to be valuable new initial data. Finally, we studied various inner boundary conditions, in the single black hole case and for binary configurations. Those boundary conditions are based on the isolated horizon formalism and include some prescriptions for quasi-equilibrium.

## Field

### Astronomy - Astrophysics

## Keywords

General relativity ; Gravitational waves ; Compact objects ; Neutron stars ; Strange quark stars ; Black holes ; Spectral methods ; Binary system ; Quasi-equilibrium ; Equation of state ; Innermost stable circular orbit ; Boundary condition.

**Laboratoire de l'Univers et de ses THéories,  
Observatoire de Paris-Meudon,**

5, place Jules Janssen, 92195 MEUDON Cedex, FRANCE



---

# Remerciements

J'aimerais remercier en premier lieu Éric Gourgoulhon, qui a accepté de me diriger pendant ces trois années de thèse et permis de mener mon projet à bien. Je suis vraiment reconnaissant pour sa grande disponibilité, sa pédagogie, ses nombreux conseils...

Je souhaite également remercier Dorota Gondek-Rosinska pour les nombreuses discussions que l'on a eu durant les deux premières années ou l'on partageait le même bureau. Merci de m'avoir fait confiance pour une première collaboration sur les étoiles étranges. Je dois également beaucoup à Jose-Luis Jaramillo, pour m'avoir fait partager ses connaissances sur son domaine de prédilection, la géométrie des trous noirs. Merci donc pepe pour ta patience, tes innombrables explications et conseils. J'associe également Kōji Uryū à ces remerciements pour m'avoir permis d'entamer une collaboration, et j'espère que celle-ci sera fructueuse.

J'aimerais remercier Luc Blanchet et Jörg Frauendiener pour avoir accepté et pris le temps d'être rapporteurs de ce travail, Richard Kerner pour avoir présidé le jury, Brandon Carter et Jérôme Margueron pour avoir été membres de ce jury.

Je tiens également à remercier tous les membres du groupe d'ondes gravitationnelles et relativité numérique, et plus particulièrement Jérôme Novak, pour sa disponibilité exemplaire, Silvano Bonazzola, sans qui le groupe n'aurait certainement pas vu le jour, et Philippe Grandclément avec qui j'ai eu le plaisir de partager le bureau cette dernière année.

Je remercie également tous les doctorants et post-doctorants du LUTH qui ont contribué à l'ambiance conviviale du laboratoire. Dans le désordre, je souhaite particulièrement remercier Loïc, Dorota, Nicolas, Zakaria, Julien, Sébastien, Stéphane, Élie, Pepe, Anne, Lap-Ming, Erin. Je remercie également les secrétaires Cécile Rosolen, Sylvie Gordon, Colette Ferreira, Stéphane Thomas et Gaëlle Penduff pour avoir toujours su répondre efficacement à mes démarches administratives.

Je souhaite adresser mes remerciements à tous mes amis, toutes les personnes que j'ai croisé et qui ont contribué d'une manière ou d'une autre au bon déroulement de ces trois années de thèse. Je ne peux oublier de citer la formidable promo du DEA CPM qui fût vraiment extraordinaire.

Enfin, je remercie ma famille pour leur soutien, leurs encouragements, et pour avoir toujours été présents. Un grand merci pour m'avoir offert la chance de m'engager dans la voie de la recherche scientifique.

---

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Éléments de théorie</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Relativité générale et formalisme 3+1</b>	<b>9</b>
1.1	Motivations et équations d'Einstein . . . . .	9
1.2	Formalisme 3+1 . . . . .	11
1.2.1	Feuilletage de l'espace-temps . . . . .	11
1.2.2	Les équations ADM . . . . .	14
1.2.3	Choix de jauge . . . . .	15
1.2.4	Problème des données initiales . . . . .	16
1.3	Système binaire . . . . .	20
1.3.1	État de quasi-équilibre . . . . .	20
1.3.2	Symétrie hélicoïdale . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Ondes Gravitationnelles</b>	<b>23</b>
2.1	Existence . . . . .	23
2.2	Description - Champs faibles . . . . .	24
2.2.1	Ondes planes . . . . .	24
2.2.2	Jauge TT . . . . .	25
2.2.3	Polarisation d'une onde plane . . . . .	26
2.3	Sources d'ondes gravitationnelles . . . . .	28
2.3.1	Formule du quadrupôle . . . . .	28
2.3.2	Luminosité gravitationnelle . . . . .	29
2.3.3	Sources astrophysiques . . . . .	30
2.4	Détection des ondes gravitationnelles . . . . .	32
2.4.1	Historique . . . . .	32
2.4.2	Défi technologique . . . . .	32
2.4.3	Barres résonnantes . . . . .	32
2.4.4	Interféromètres au sol . . . . .	33
2.4.5	Interféromètre spatial LISA . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Étoiles à neutrons</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction - Objets compacts . . . . .	39
3.2	Historique . . . . .	41
3.3	Structure d'une étoile à neutrons . . . . .	41

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.3.1	Équation d'état . . . . .	41
3.3.2	Structure . . . . .	42
3.4	Paramètres physiques . . . . .	44
3.4.1	Masse - Rayon . . . . .	44
3.4.2	Masse maximale . . . . .	44
3.5	Étoiles de quarks étranges . . . . .	46
3.5.1	Introduction . . . . .	46
3.5.2	Modèle du sac MIT . . . . .	48
3.5.3	Caractéristiques des étoiles étranges . . . . .	51
3.5.4	Observations . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Trous noirs</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.2	Historique de l'idée de trou noir . . . . .	56
4.3	Trou noir de Schwarzschild . . . . .	57
4.3.1	La solution de Schwarzschild . . . . .	57
4.3.2	Coordonnées de Kruskal-Szekeres . . . . .	58
4.4	Trou noir de Kerr . . . . .	61
4.4.1	Coordonnées de Boyer-Lindquist . . . . .	61
4.4.2	Ergosphère . . . . .	63
4.4.3	Extraction d'énergie à partir d'un trou noir . . . . .	63
4.4.4	Lois de la thermodynamique des trous noirs . . . . .	64
4.5	Horizons - Horizons isolés . . . . .	65
4.5.1	Hypersurfaces nulles . . . . .	65
4.5.2	Horizons des événements et horizons apparents . . . . .	67
4.5.3	Horizons isolés . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Méthodes spectrales</b>	<b>75</b>
5.1	Principe . . . . .	76
5.2	Polynômes de Chebyshev . . . . .	77
5.3	Équations différentielles . . . . .	79
5.4	Décomposition multi-domaines . . . . .	81
5.4.1	Phénomène de Gibbs . . . . .	81
5.4.2	Approche multi-domaines . . . . .	82
5.5	Problème à trois dimensions . . . . .	84
5.5.1	Système de coordonnées . . . . .	84
5.5.2	Bases de décomposition spectrale . . . . .	85
<b>II</b>	<b>Résultats</b>	<b>87</b>
<b>6</b>	<b>Last orbits of binary strange quark stars</b>	<b>89</b>
6.1	Introduction . . . . .	91

## TABLE DES MATIÈRES

---

6.2	Assumptions . . . . .	92
6.3	The equation of state and stellar models . . . . .	93
6.4	Equations to be solved . . . . .	96
6.4.1	The gravitational field equations . . . . .	96
6.4.2	The fluid equations . . . . .	97
6.4.3	Boundary condition for the velocity potential . . . . .	98
6.5	Numerical results . . . . .	99
6.5.1	The method . . . . .	99
6.5.2	Evolutionary sequences . . . . .	100
6.5.3	Corotating binaries . . . . .	100
6.5.4	Irrotational binaries . . . . .	101
6.6	Summary and discussion . . . . .	104
<b>7</b>	<b>Final phase of inspiral of strange quark stars binaries</b>	<b>107</b>
7.1	Introduction . . . . .	109
7.2	Equations of state and stellar models . . . . .	110
7.3	Assumptions and Methods . . . . .	112
7.3.1	Assumptions . . . . .	112
7.3.2	Equations to be solved . . . . .	113
7.3.3	Numerical method . . . . .	114
7.4	Evolutionary sequences . . . . .	114
7.5	Results for equal-mass strange star binaries with $M_\infty = 2.7 M_\odot$ . . . . .	115
7.5.1	The impact of EOS on the GW frequency at ISCO . . . . .	116
7.5.2	Analytical fits to numerical results . . . . .	118
7.5.3	Energy spectrum of gravitational waves . . . . .	120
7.6	Influence of the mass . . . . .	121
7.7	Conclusion . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Étoiles à neutrons binaires : au delà de IWM</b>	<b>127</b>
8.1	Introduction et motivation . . . . .	128
8.2	Équations pour le champ gravitationnel . . . . .	129
8.2.1	Rappel Formalisme 3+1 . . . . .	129
8.2.2	Décomposition conforme . . . . .	130
8.2.3	Équations d'Einstein en décomposition conforme . . . . .	131
8.2.4	Définition des potentiels $h^{ij}$ . . . . .	132
8.2.5	Feuilletage maximal et jauge de Dirac . . . . .	132
8.2.6	Système d'équations final . . . . .	133
8.2.7	Approximation sans ondes . . . . .	135
8.3	Équations pour le fluide . . . . .	136
8.3.1	Conservation du tenseur énergie-impulsion . . . . .	136
8.3.2	Expressions en jauge de Dirac et feuilletage maximal . . . . .	136
8.4	Méthodes de résolution . . . . .	137
8.4.1	Système complet . . . . .	137

## TABLE DES MATIÈRES

---

8.4.2	Méthodes numériques . . . . .	137
8.4.3	Procédure itérative . . . . .	139
8.5	Résultats numériques . . . . .	140
8.5.1	Tests du code . . . . .	140
8.5.2	Configuration irrotationnelle $M/R = 0.12$ , $d = 50$ km . . . . .	141
8.5.3	Séquences de Quasi-équilibre . . . . .	146
8.6	Conclusion . . . . .	152
8.7	Article soumis à Phys. Rev. Lett. (preprint, gr-qc/0511136) . . . . .	153
<b>9</b>	<b>Trous noirs et conditions de bord</b>	<b>163</b>
9.1	Motivations . . . . .	163
9.2	Décomposition sandwich conforme . . . . .	164
9.3	Conditions de bord d'horizons isolés . . . . .	165
9.3.1	Quelques définitions préliminaires . . . . .	165
9.3.2	Conditions de bord sur un horizon non-expansif . . . . .	166
9.3.3	Conditions de bord sur un horizon faiblement isolé . . . . .	168
9.4	Trou noir simple . . . . .	169
9.4.1	Méthode . . . . .	169
9.4.2	Dégénérescence de l'ensemble des conditions de bord . . . . .	170
9.4.3	Test de la condition de bord mixte pour $\tilde{b}$ . . . . .	171
9.4.4	Autres combinaisons de conditions de bord . . . . .	172
9.4.5	Discussion . . . . .	175
9.5	Trous noirs binaires . . . . .	175
9.5.1	Méthode . . . . .	175
9.5.2	Conditions limites . . . . .	177
9.5.3	Tests . . . . .	178
9.5.4	Séquences d'évolution . . . . .	180
9.6	Conclusion . . . . .	182
	<b>Conclusion</b>	<b>189</b>

# Introduction

Ce travail de thèse a été réalisé au sein du groupe “Gravitation relativiste et sources d’ondes gravitationnelles” au Laboratoire de l’Univers et ses THéories” (LUTH - Observatoire de Paris-Meudon). Il est le résultat d’une collaboration avec les membres permanents et post-docs du groupe et en particulier avec Ericourgoulhon, Dorota Gondek-Rosinska et José-Luis Jaramillo.

La théorie de la relativité générale développée par Einstein au début du vingtième siècle prévoit l’existence d’ondes gravitationnelles, des vibrations de l’espace-temps. Cette théorie ayant fait ses preuves à chaque fois qu’elle a été confrontée à l’expérience, cette prédiction paraît fondée à la communauté scientifique et plusieurs détecteurs interférométriques d’ondes gravitationnelles sont en cours de calibration, parmi lesquels on peut citer le projet franco-italien VIRGO, américain LIGO et anglo-allemand GEO600, sans oublier le projet d’interféromètre spatial LISA. On devrait assister, au cours de ces prochaines années, à la première détection directe des ondes gravitationnelles, leur détection indirecte ayant été obtenue par l’observation du pulsar binaire PSR 1913+16 par Hulse et Taylor en 1974 (prix Nobel de physique en 1993). Mais, l’intérêt de ces détecteurs ne s’arrête pas là, ils fourniront également des informations précieuses sur les sources émettrices et les théories physiques les gouvernant. En ce sens, ils sont de véritables observatoires, ouvrant la voie dans un futur proche à un nouveau domaine de l’astronomie, et une nouvelle fenêtre sur le cosmos. Cependant, les signaux gravitationnels attendus sont extrêmement faibles, les interféromètres terrestres doivent détecter des variations de distance de l’ordre de  $10^{-18}$  m. Le signal étant en particulier plus faible que de nombreuses sources de bruit présentes dans le détecteur, il sera nécessaire de le filtrer afin de l’extraire du bruit. Ainsi, une connaissance théorique préalable des sources d’ondes gravitationnelles est un complément nécessaire à ces expériences, permettant de faciliter le travail d’analyse des données.

Parmi les sources astrophysiques d’ondes gravitationnelles, les systèmes binaires d’objets compacts sont celles ayant le plus de chance d’être détectées par la première génération des détecteurs interférométriques au sol. L’objectif de ce travail est donc d’améliorer la connaissance théorique de ces systèmes, et plus particulièrement les systèmes binaires d’étoiles à neutrons, d’étoiles de quarks étranges et de trous noirs. Les étoiles à neutrons sont un défi lancé à notre compréhension de la matière dans des conditions extrêmes qui sont, pour l’heure, inaccessibles en laboratoire. Ces astres sont parmi les plus compacts de l’Univers, avec des densités pouvant atteindre quelques dix mille milliards de fois celle de la Terre. A de telles densités, les atomes et mêmes les noyaux ne peuvent résister aux gigantesques pressions qui règnent au coeur de l’étoile. Elles peuvent même dévoiler de nouveaux états de la matière, tel un plasma de quarks



$u$ ,  $d$  et  $s$ , on les appelle alors étoiles de quarks étranges. Les trous noirs sont, quand à eux, un intense sujet de recherche actuel, autant du point de vue observationnel que théorique. De nombreuses observations de trous noirs dans des binaires X et au centre de la plupart des galaxies ont confirmé leur existence et classé les trous noirs comme des objets “standards” de l’astronomie. Les trous noirs sont les objets rois de la relativité générale, ayant un champ gravitationnel tellement intense que même la lumière ne peut s’échapper.

L’évolution d’un système binaire d’objets compacts est dictée par l’émission d’ondes gravitationnelles, qui provoque la perte d’énergie et de moment angulaire du système et donc le rapprochement des deux astres. Ils spiralent l’un autour de l’autre jusqu’à leur collision. On peut distinguer deux phases dans cette évolution : la première correspond à une séparation entre les deux objets suffisamment grande pour négliger la vitesse radiale devant la vitesse orbitale. Les orbites sont alors considérées comme circulaires, permettant de simplifier un problème à quatre dimensions à un problème à trois dimensions. Il s’agit de l’approximation de quasi-équilibre. La seconde phase est la coalescence proprement dite, terminant par la fusion des deux objets. L’étude théorique de ces systèmes se fait dans le cadre de la relativité générale et demande la résolution de systèmes d’équations aux dérivées partielles, non linéaires et couplées. Or, de tels systèmes d’équations n’admettent de solutions analytiques exactes que pour des situations simplifiées. On semble donc contraints, pour une description suffisamment précise, de se tourner vers des méthodes approximatives ou des méthodes numériques. Pour cette thèse, cette seconde possibilité a été retenue. Elle est rendue efficace grâce notamment à l’emploi de méthodes spectrales, adaptées à la résolution d’équations elliptiques.

Dans ce travail, on étudie les dernières orbites de la phase de quasi-équilibre. Elles permettent d’une part de fournir des données initiales aussi réalistes que possible pour la phase de coalescence, et d’autre part d’apporter de nombreuses informations sur les objets compacts émetteurs. La détermination de la fréquence des ondes gravitationnelles à la dernière orbite stable permet, par exemple, de contraindre fortement l’équation d’état des étoiles à neutrons. Un effort est fait dans cette thèse pour améliorer, rendre ces données initiales les plus réalistes possible, par l’étude de binaires d’étoiles à neutrons à l’aide d’une théorie sans onde allant au delà de l’approximation communément admise de métrique conformément plate, par l’étude de conditions de bord aux horizons des trous noirs provenant du formalisme des horizons isolés, regroupant des ingrédients de quasi-équilibre, mais également par l’étude de binaires d’étoiles de quarks étranges décrites par des équations d’état dérivées de calculs de microphysique.

Le manuscrit est organisé de la façon suivante :

Après un rappel des équations de la relativité générale, le chapitre 1, **Relativité générale et formalisme 3+1**, présente le formalisme 3+1 généralement utilisé dans les études numériques. Différents choix de jauge couramment utilisés sont mentionnés puis les deux décompositions employées pour résoudre le problème des données initiales, la décomposition conforme, transverse et sans trace et le formalisme sandwich conforme sont présentées. Enfin, la traduction en langage relativiste de l’hypothèse de quasi-équilibre est explicitée.

Le chapitre 2, **Ondes gravitationnelles**, présente la théorie linéarisée des équations d’Einstein, conduisant à la mise en évidence du caractère ondulatoire de la théorie. Les effets des ondes planes sur la matière sont ensuite expliqués avant une introduction sur les différentes

sources astrophysiques et les détecteurs interférométriques terrestres et spatiaux.

Le chapitre 3, **Étoiles à neutrons**, est une introduction aux étoiles à neutrons, leur structure interne ainsi que leurs principales caractéristiques y sont décrites. La nécessité d'introduire une équation d'état pour décrire la matière est expliquée. Il suit alors une description des étoiles étranges, à travers le modèle du sac MIT. On s'attache enfin à leurs propriétés les plus remarquables et leurs conséquences observationnelles.

Après un bref historique, le chapitre 4, **Trous noirs**, introduit les deux types de trous noirs stationnaires, les trous noirs de Schwarzschild et de Kerr. Leurs propriétés générales et notamment les lois de la thermodynamique des trous noirs sont discutées. Différents types d'horizons, les horizons apparents et les horizons des événements sont ensuite définis, afin d'introduire le concept d'horizon isolé. On présente alors la structure hiérarchique des horizons isolés, à commencer par les horizons non-expansifs, puis les horizons faiblement isolés pour terminer par les horizons fortement isolés, incorporant toujours davantage l'idée de quasi-équilibre.

Le chapitre 5, **Méthodes spectrales**, présente les principes de base des méthodes spectrales. A travers un exemple, la technique de résolution des équations différentielles est présentée, illustrant l'efficacité des méthodes spectrales par rapport aux méthodes aux différences finies. L'importance de la décomposition multi-domaines, pour éviter notamment le phénomène de Gibbs est expliquée, avant une généralisation aux problèmes à trois dimensions.

Le chapitre 6, **Last orbits of binary strange quark stars**, est un article publié dans Physical Review D [96]. Les équations pour le champ gravitationnel dans l'approximation IWM sont rapidement rappelées, et la condition de bord à la surface des étoiles pour le potentiel des vitesses est explicitée. On commente alors les différences obtenues sur les séquences d'évolution d'étoiles étranges binaires et étoiles à neutrons binaires décrites par une équation d'état polytropique.

Le chapitre 7, **The final phase of inspiral of strange quark stars binaries**, est un article soumis à Physical Review D. Les différentes équations d'état considérées, le modèle du sac MIT et l'équation d'état de Dey *et al.* (1998) sont présentées. On étudie l'influence de l'équation d'état et de la masse totale du système binaire sur les dernières orbites quasi-circulaires. On montre qu'une instabilité dynamique apparaît pour chaque cas étudié. De plus, la fréquence à la dernière orbite stable est fortement dépendante de l'équation d'état considérée, ce qui pourrait permettre de contraindre efficacement les équations d'état de la matière ultra-dense par l'observation des ondes gravitationnelles.

Le chapitre 8, **Étoiles à neutrons binaires : au delà de IWM**, est dédié à l'étude de binaires d'étoiles à neutrons à l'aide d'une théorie sans onde prenant en compte la partie non-conformément plate de la métrique. On présente les équations pour le champ gravitationnel ainsi que les équations pour le fluide. Après avoir discuté l'approximation considérée, les différents résultats obtenus sont décrits, illustrés par les isocontours des potentiels métriques. On montre que les résultats issus d'une séquence d'évolution sont relativement différents, et censés être plus précis que les résultats obtenus à l'aide de l'approximation IWM.

Le chapitre 9, **Trous noirs et conditions de bord**, est une étude systématique des conditions de bords dérivées du formalisme des horizons isolés. Une nouvelle approche et de nouvelles perspectives sur l'utilisation des conditions aux contours, appliquée au cas d'un seul trou noir sont discutées. Se tournant vers des systèmes binaires de trous noirs quasi-stationnaires,

## *INTRODUCTION*

---

l'influence des conditions de bord de quasi-équilibre sur l'évolution du système est étudiée.

# Notations et conventions

Nous adopterons dans cette thèse les différentes conventions utilisées par Misner, Thorne et Wheeler [107]. En particulier, la signature de la métrique sera  $(-, +, +, +)$ , la première coordonnée étant le temps.

D'autre part :

- les indices notés par des lettres grecques prennent les valeurs  $\{0, 1, 2, 3\}$ . On utilisera les lettres du début de l'alphabet ( $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ) pour des indices libres, et les lettres commençant par  $\mu$  ( $\mu, \nu, \rho, \dots$ ) pour des indices muets contractés.
- les indices notés par des lettres latines majuscules ( $A, B, C, \dots$ ) prennent les valeurs  $\{0, 2, 3\}$ .
- les indices notés par des lettres latines minuscules commençant par la lettre  $i$  ( $i, j, k, \dots$ ) prennent les valeurs  $\{1, 2, 3\}$  et celles du début de l'alphabet ( $a, b, c, \dots$ ) prennent les valeurs  $\{2, 3\}$  seulement.
- nous utiliserons la convention de sommation des indices répétés. Par exemple :

$$V_\mu V^\mu = V_1 V^1 + V_2 V^2 + V_3 V^3 + V_4 V^4$$



**Première partie**  
**Éléments de théorie**



# Chapitre 1

## Relativité générale et formalisme 3+1

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Motivations et équations d'Einstein</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Formalisme 3+1</b>	<b>11</b>
1.2.1	Feuilletage de l'espace-temps	11
1.2.2	Les équations ADM	14
1.2.3	Choix de jauge	15
1.2.4	Problème des données initiales	16
<b>1.3</b>	<b>Système binaire</b>	<b>20</b>
1.3.1	État de quasi-équilibre	20
1.3.2	Symétrie hélicoïdale	20

---

### 1.1 Motivations et équations d'Einstein

Nous ne présenterons ici que quelques idées et résultats issus de la relativité générale. Pour plus de détails ainsi que des démonstrations ou définitions plus précises, on peut citer, parmi les nombreux ouvrages traitant de ce sujet, Schutz [122], Misner *et al.* [107], Weinberg [147] et Wald [142].

La théorie de la relativité générale fut introduite par Einstein en 1915, dix ans après avoir explicité les lois de la théorie de la relativité restreinte. Commencent par un principe physique simple qui a montré le chemin vers cette nouvelle théorie, le principe d'équivalence faible. Ce dernier suppose l'égalité entre la masse inertielle, qui caractérise la faculté d'un objet à rester dans un état de mouvement donné, et la masse inerte (ou masse gravitationnelle) qui indique comment un objet interagit avec le champ de gravitation. Une conséquence immédiate est que le comportement d'une particule en chute libre est universel, indépendant de la masse. Le principe d'équivalence implique qu'il n'existe pas de moyen de distinguer entre les effets d'un champ de



gravitation et les effets d'un référentiel en accélération uniforme, à condition de se restreindre à une région suffisamment petite de l'espace-temps. De cette restriction, il découle qu'on ne peut pas, en général, définir un repère inertiel que l'on étendrait à tout l'espace-temps, comme on peut le faire en relativité restreinte. On peut seulement définir des repères inertiels locaux, qui suivent le mouvement d'une particule en chute libre dans une région suffisamment petite. Un observateur en chute libre dans un champ de gravitation pourra toujours se croire inertiel, mais seulement quelques temps. En ce sens, la gravitation n'est pas une "force" et Einstein a compris qu'il s'agissait plutôt d'un effet dû à la géométrie de l'espace-temps.

Mathématiquement, l'espace-temps est une variété pseudo-riemmanienne  $(\mathcal{M}, g)$  de dimension 4. Toute l'information sur le champ de gravitation est contenu dans la **métrique**  $g$ , qui est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et de signature  $(-, +, +, +)$ . Étant donnés deux points séparés par un intervalle infinitésimal  $dx^\mu$  dans un certain système de coordonnées, la distance entre ces points est

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

où les  $g_{\mu\nu}$  sont les composantes covariantes de la métrique par rapport à la base naturelle associée au système de coordonnées.

L'idée centrale, en relativité générale, est de supposer que la gravitation est une manifestation de la courbure de l'espace-temps et que la matière elle-même influence l'espace-temps pour créer la courbure. Les équations d'Einstein relient donc le **tenseur d'Einstein**  $G_{\mu\nu}$  décrivant la courbure de l'espace-temps au **tenseur énergie-impulsion**  $T_{\mu\nu}$  décrivant la matière

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

avec  $\kappa$  une constante de proportionnalité. Le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  est le tenseur de rang (0,2) le plus simple, contenant des dérivées secondes de la métrique, que l'on peut construire à partir du tenseur de Riemann, décrivant la courbure, et de telle sorte que la conservation de l'énergie-impulsion  $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0$ ,  $\nabla$  étant la dérivée covariante associée à la métrique  $g$ , soit satisfaite. Il s'écrit

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}, \quad (1.3)$$

où  $R_{\mu\nu}$  et  $R$  sont respectivement le tenseur et le scalaire de Ricci, définis à partir de contractions du tenseur de Riemann. Sur cette dernière équation, on a omis le terme de constante cosmologique de la forme  $\Lambda g_{\mu\nu}$ , qui pour des raisons d'ordre de grandeurs, n'a pas d'influence sur la physique aux échelles locales qui nous intéressent ici. La constante de proportionnalité  $\kappa$  est maintenant déterminée en s'assurant qu'on retrouve bien l'équation de Poisson pour le champ de gravitation à la limite newtonienne

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \quad (1.4)$$

où  $\Phi$  est le potentiel gravitationnel newtonien,  $G$  est la constante de la gravitation et  $\rho$  est la densité de masse. On obtient  $\kappa = 8\pi G/c^4$ , avec  $c$  la vitesse de la lumière. On peut donc réécrire les équations d'Einstein sous la forme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.5)$$

Dans la suite, on se placera dans les unités géométriques où  $G = c = 1$ .

Le système des équations d'Einstein (1.5) est un système de dix équations couplées, du second ordre en  $g_{\mu\nu}$  et non linéaires. Il s'agit d'un système extrêmement difficile à résoudre, et seules quelques solutions exactes sont connues. Dans cette thèse, nous résolvons ces équations pour quelques cas particuliers de systèmes binaires d'objets compacts.

## 1.2 Formalisme 3+1

### 1.2.1 Feuilletage de l'espace-temps

L'unification de l'espace et du temps en espace-temps est un point central en relativité. Cependant, pour une étude numérique, cette unification n'est pas très adaptée. On remanie les équations de la relativité générale à l'aide d'une formulation appelée **formalisme 3+1**, dans laquelle un temps coordonnée est explicitement séparé des trois coordonnées spatiales. Le formalisme 3+1 de la relativité générale a pour but de réduire la résolution des équations d'Einstein à un problème de Cauchy, c'est-à-dire un problème d'évolution à partir de données initiales. Cette formulation est particulièrement intéressante pour résoudre le système des équations d'Einstein numériquement.

Comme l'illustre la figure 1.1, l'espace-temps est feuilleté par une famille continue d'hypersurfaces  $\Sigma_t$  (donc une variété de dimension 3) de genre espace, labellée par le temps coordonnée  $t$ . Tout vecteur tangent aux hypersurfaces  $\Sigma_t$  est donc de genre espace et tout vecteur normal est de genre temps. On définit alors le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  normal aux hypersurfaces  $\Sigma_t$ , de genre temps et dirigé vers le futur. Il peut être identifié à la quadrivitesse d'observateurs dont la ligne d'univers est orthogonale à  $\Sigma_t$ , appelés observateurs eulériens. Par définition du vecteur normal, la 1-forme  $\underline{n}$ , de composantes  $n_\mu = g_{\mu\nu}n^\nu$ , est parallèle au gradient du champ scalaire  $t$  :

$$\underline{n} = -Ndt \quad (1.6)$$

Le facteur de proportionnalité  $N$  est la fonction **lapse**, et assure que la normale soit bien unitaire  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$ . La fonction lapse est le rapport entre le temps propre, mesuré par un observateur eulérien se déplaçant de l'hypersurface  $\Sigma_t$  à l'hypersurface  $\Sigma_{t+dt}$ , et le temps coordonnée  $dt$ .

On peut introduire ensuite un système de coordonnées sur  $\mathcal{M}$  adapté au feuilletage  $\Sigma_t$  en considérant un système de coordonnées  $(x^i)$  sur chaque hypersurface  $\Sigma_t$ , de telle sorte que  $(x^i)$  varie lentement d'une hypersurface à une autre. On a ainsi un système de coordonnées  $(x^\alpha) = (x^0 = t, x^i)$  sur  $\mathcal{M}$ . Le vecteur temps coordonnée

$$\mathbf{t} := \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.7)$$

est tel que les coordonnées spatiales sont constantes le long de ses lignes de champs, comme le montre la figure 1.2. Étant un vecteur dual à la 1-forme  $dt$ , c'est-à-dire que  $\langle dt, \mathbf{t} \rangle = 1$ , on obtient à partir de l'équation (1.6), la décomposition orthogonale 3+1 suivante

$$\mathbf{t} = N\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} \quad \text{avec } \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \quad (1.8)$$

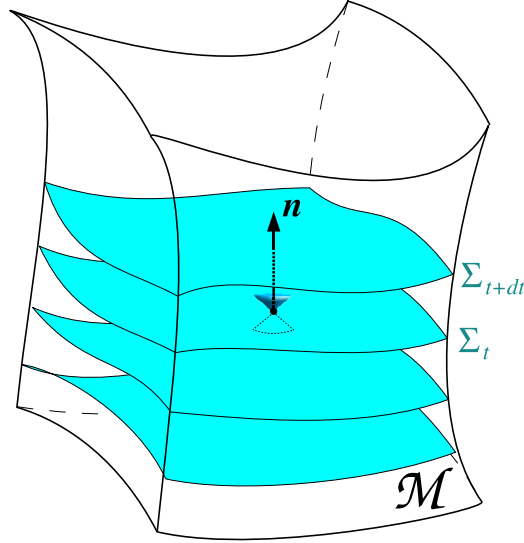


FIG. 1.1 – Foliation de l’espace-temps par une famille d’hypersurfaces spatiales  $\Sigma_t$ . Schéma tiré de [74].

où  $\beta$  est le vecteur **shift** associé au système de coordonnées  $(x^\alpha)$ . La coordonnée spatiale d’un observateur eulérien se déplaçant de l’hypersurface  $\Sigma_t$  à l’hypersurface  $\Sigma_{t+dt}$  est donnée par  $x^i(t + dt) = x^i(t) - \beta^i dt$ .

Les coordonnées de la normale  $n$  sont, d’après les équations (1.6) et (1.8)

$$n_\alpha = (-N, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad n^\alpha = \left( \frac{1}{N}, -\frac{\beta^1}{N}, -\frac{\beta^2}{N}, -\frac{\beta^3}{N} \right). \quad (1.9)$$

La donnée d’un choix de coordonnées  $(x^i)$  sur une hypersurface initiale  $\Sigma_0$ , puis de la fonction lapse  $N$  et du vecteur shift  $\beta$  sur  $\mathcal{M}$  détermine complètement les coordonnées  $(x^\alpha)$  sur  $\mathcal{M}$ . La fonction lapse et le vecteur shift fixent comment les coordonnées évoluent d’une hypersurface  $\Sigma$  à une autre. Le lapse détermine quel est le temps propre qui s’est écoulé entre des hypersurfaces le long de la normale  $n$ , tandis que le shift détermine le décalage des coordonnées spatiales par rapport au vecteur normal.

Chaque vecteur quadri-dimensionnel peut être décomposé en une partie spatiale, qui vis dans les hypersurfaces  $\Sigma_t$ , et une partie temporelle, aligné au vecteur normal  $n$ . La partie spatiale d’un tenseur de rang 2 est déterminée par contraction avec l’opérateur de projection

$$\gamma^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + n^\mu n_\nu, \quad (1.10)$$

et la partie temporelle par contraction avec

$$N^\mu_\nu = -n^\mu n_\nu. \quad (1.11)$$

La métrique  $g$  induit une métrique purement spatiale  $\gamma$  sur chaque hypersurface  $\Sigma_t$  donnée par

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (1.12)$$

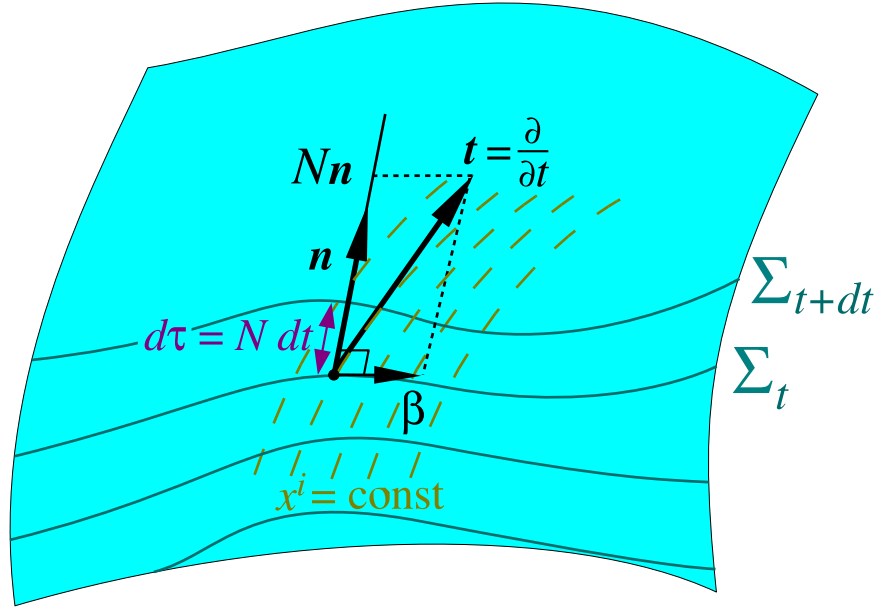


FIG. 1.2 – Les lignes de coordonnées spatiales constantes  $x^i = \text{const}$  définissant le vecteur temps coordonnée  $t$  et le vecteur shift  $\beta$ . Le vecteur unitaire  $\mathbf{n}$  normal aux hypersurfaces  $\Sigma_t$  est également représenté. Schéma tiré de [74].

La 3-métrique  $\gamma$  est également appelée première forme fondamentale de  $\Sigma_t$ . Les hypersurfaces  $\Sigma_t$  étant de genre espace,  $\gamma$  est une métrique définie positive, ou riemannienne. On peut alors écrire l'élément de longueur  $ds^2$  en fonction de la 3-métrique  $\gamma$ , de la fonction lapse  $N$  et du vecteur shift  $\beta$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt), \quad (1.13)$$

c'est-à-dire, sous forme matricielle

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \beta^i \beta_i - N^2 & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{\beta^i}{N^2} \\ \frac{\beta^j}{N^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i \beta^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Cependant, la 3-métrique spatiale  $\gamma$  ne fixe que la géométrie intrinsèque aux hypersurfaces  $\Sigma_t$ . On définit alors une seconde forme fondamentale, le **tenseur de courbure extrinsèque**, qui décrit comment les hypersurfaces sont plongées dans l'espace-temps  $\mathcal{M}$ . La courbure extrinsèque précise comment varie la 3-métrique spatiale le long du vecteur normal  $\mathbf{n}$ , et est donné par

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \gamma_{\mu\nu} \quad \text{soit} \quad K_{ij} = \frac{1}{2N} \left( \mathcal{L}_{\beta} \gamma_{ij} - \frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} \right) \quad (1.15)$$

où  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$  et  $\mathcal{L}_{\beta}$  sont les dérivées de Lie respectivement selon  $\mathbf{n}$  et  $\beta$ . La courbure extrinsèque est un tenseur d'ordre 2, symétrique et purement spatial.

## 1.2.2 Les équations ADM

Il est maintenant possible de décomposer les équations d'Einstein (1.5) sous une forme adaptée au formalisme 3+1. Pour cela, on doit projeter les équations d'Einstein sur les hypersurfaces  $\Sigma_t$  et sur les normales  $\mathbf{n}$ , et les exprimer en fonction des inconnues purement spatiales que nous venons d'introduire : la fonction lapse  $N$ , le vecteur shift  $\beta$ , la 3-métrique spatiale  $\gamma$  et le tenseur de courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$ .

D'un coté, on projete le tenseur d'Einstein  $G_{\mu\nu}$  sur les hypersurfaces et leurs normales en utilisant les relations de Gauss-Codazzi (voir par exemple [158]). De l'autre coté, les différentes projections du tenseur d'énergie-impulsion  $T_{\mu\nu}$  définissent

$$E := T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad (1.16)$$

$$J_i := -\gamma_i^\mu T_{\mu\nu} n^\nu \quad (1.17)$$

$$S_{ij} := \gamma_i^\mu \gamma_j^\nu T_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

où  $E$ ,  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{S}$  sont respectivement la densité d'énergie, le vecteur densité d'impulsion et le tenseur des contraintes, mesurés par l'observateur eulérien de 4-vitesse  $\mathbf{n}$ .

Les équations d'Einstein se séparent en trois équations :

- une double projection sur  $\mathbf{n}$  donne l'équation de **contrainte hamiltonienne** :

$${}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi E \quad (1.19)$$

- une projection sur  $\Sigma_t$  puis sur  $\mathbf{n}$  donne l'équation de **contrainte impulsionnelle** :

$$D^j K_{ij} - D_i K = 8\pi J_i \quad (1.20)$$

- une double projection sur  $\Sigma_t$  donne **l'équation 3+1 dynamique** :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} = & -D_i D_j N + N \left\{ {}^3R_{ij} - 2K_{ik}K^k_j + K K_{ij} \right. \\ & \left. + 4\pi ((S - E) \gamma_{ij} - 2S_{ij}) \right\} + \mathcal{L}_\beta K_{ij}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

où  $R_{ij}$  et  $R$  sont respectivement le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci associés à la 3-métrique  $\gamma$ ,  $K$  est la trace de  $\mathbf{K}$  et  $S$  celle de  $\mathbf{S}$ ,  $D_i$  est la dérivée covariante associée à la 3-métrique.

A cela, il convient d'ajouter une équation d'évolution pour la 3-métrique  $\gamma$ , qui n'est autre que l'équation (1.15), la définition de la courbure extrinsèque

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = -2N K_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij}. \quad (1.22)$$

La contrainte hamiltonienne (1.19) et la contrainte impulsionnelle (1.20) ne contiennent pas de dérivées secondes de la métrique dans une direction de genre temps contrairement à l'équation dynamique (1.21) (rappelons que de par sa définition, la courbure extrinsèque est déjà une dérivée première de la 3-métrique dans la direction temporelle  $\mathbf{n}$ ). Elles ne sont donc

pas associées à une évolution dynamique du champ gravitationnel mais sont des contraintes sur  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$  à satisfaire sur chaque hypersurface  $\Sigma_t$ .

Les équations d'évolution (1.21) et (1.22) décrivent quand à elles comment  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$  évoluent d'une hypersurface à une autre. Il peut être montré que les équations d'évolution préservent les contraintes, c'est-à-dire que si les contraintes sont vérifiées sur une hypersurface alors elles continueront à l'être sur les hypersurfaces suivantes. Le système d'équations (1.19) à (1.22) est communément appelé équations ADM (Arnowitt, Deser et Misner). L'avantage de cette formulation est que l'on se ramène à un problème d'évolution, dit aussi problème de Cauchy.

En relativité numérique, la procédure standard consiste à spécifier en premier lieu les valeurs de la 3-métrique  $\gamma$  et de la courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$  sur une hypersurface initiale  $\Sigma_0$  (surface de Cauchy) et les évoluer à l'aide des équations dynamiques (1.21) et (1.22). Pour que ce schéma soit valide, les données initiales doivent satisfaire les contraintes (1.19) et (1.20). Le problème qui consiste à trouver les paires  $(\gamma, \mathbf{K})$  sur  $\Sigma_0$  qui satisfont ces contraintes constitue le problème des données initiales de la relativité générale.

Notons que les équations ADM ne déterminent que la métrique spatiale  $\gamma$  et la courbure extrinsèque  $\mathbf{K}$ , mais pas la fonction lapse  $N$  ni le vecteur shift  $\beta$ . Ces dernières quantités déterminent comment les coordonnées évoluent d'une hypersurface à une autre et reflètent la liberté de coordonnées de la relativité générale. Choisir des coordonnées adaptées à une situation que l'on veut simuler est un point clef du succès de la simulation. Il s'agit du problème de la section suivante.

### 1.2.3 Choix de jauge

Avant d'intégrer les équations d'évolutions pour un ensemble de données initiales, un système de coordonnées doit être choisi, à l'aide des fonctions lapse  $N$  et shift  $\beta$ . Les choix pour le lapse sont souvent appelés conditions de feuilletage et les choix pour le shift conditions de jauge spatiales.

Étant libres de choisir n'importe quelle fonction lapse et vecteur shift, on peut être tentés de faire le choix particulièrement simple, nommé feuilletage géodésique

$$N = 1 \quad \text{et} \quad \beta^i = 0 \quad (1.23)$$

Le choix  $\beta^i = 0$  est appelé condition de jauge sans shift. Les observateurs eulériens et les observateurs coordonnées, qui suivent des trajectoires de coordonnées spatiales constantes, coïncident. Dans cette jauge, les observateurs coordonnées sont en chute libre et suivent des géodésiques, ce qui explique le nom feuilletage géodésique. Malheureusement, ce choix de coordonnées est un choix particulièrement mauvais pour les simulations numériques. Dans un espace-temps de Schwarzschild, chaque observateur coordonné initialement au repos va tomber dans la singularité en un temps fini. Et encore pire, non seulement les observateurs coordonnés sont attirés vers les singularités mais tendent également à former des singularités de coordonnées.

En ce qui concerne les choix plus judicieux du feuilletage, c'est-à-dire de la fonction lapse, on peut citer :

- le **feuilletage maximal** qui suppose pour la trace de la courbure extrinsèque

$$K = 0. \quad (1.24)$$

En utilisant la contrainte hamiltonienne (1.19) et la trace de l'équation d'évolution (1.21), on peut voir que cette équation mène à une condition pour le lapse. Il est possible de montrer que le feuilletage maximal extrémise le volume des hypersurfaces  $\Sigma_t$ . C'est un choix particulièrement intéressant puisqu'il a la propriété d'éviter les singularités.

- le feuilletage polaire consistant à fixer

$$K = K^r_r, \quad (1.25)$$

$r$  étant la coordonnée radiale, est particulièrement intéressant pour les problèmes à symétrie sphérique.

Quand au choix des coordonnées spatiales, on peut mentionner :

- la jauge de distorsion minimale qui minimise la variation temporelle de la métrique conforme

$$D^i (\gamma^{1/3} \partial_t (\gamma^{-1/3} \gamma_{ij})) = 0. \quad (1.26)$$

où  $\gamma$  est le déterminant de la 3-métrique  $\gamma$ . Cette condition a été utilisée avec succès dans de nombreuses simulations même si Shibata [123] a montré qu'elle n'était pas adéquate pour les effondrements gravitationnels.

- la **jauge de Dirac** généralisée [27]

$$\mathcal{D}_j \left[ \left( \frac{\gamma}{f} \right)^{1/3} \gamma^{ij} \right] = 0 \quad (1.27)$$

où  $\mathcal{D}$  est la dérivée covariante par rapport à la métrique plate et  $f$  le déterminant de la métrique plate. Il s'agit d'une généralisation covariante, c'est-à-dire indépendante des coordonnées, de la jauge de Dirac. Cette jauge détermine complètement les coordonnées des hypersurfaces  $\Sigma_t$ , même l'hypersurface initiale.

## 1.2.4 Problème des données initiales

### 1.2.4.1 Décomposition conforme

Dans cette section, on présente les formalismes les plus courants pour résoudre les équations de contraintes (1.19) et (1.20). La plupart des approches impliquent une décomposition conforme, où la 3-métrique physique  $\gamma$  est écrite comme le produit d'un facteur conforme  $\Psi$  et d'une métrique auxiliaire, la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$  telle que

$$\gamma_{ij} = \Psi^4 \tilde{\gamma}_{ij}. \quad (1.28)$$

On pourrait penser que cette décomposition est juste une astuce mathématique. Cependant, York [156] a montré que les degrés de liberté dynamiques sont contenus dans la métrique conforme.

On choisira souvent le **facteur conforme**  $\Psi^4 = \gamma^{1/3}$  de telle sorte que le déterminant de la métrique conforme soit égal à un. La métrique conforme n'est pas un tenseur mais une densité de tenseur de poids -2/3, et il n'existe donc pas une unique dérivée covariante associée à cette métrique. Pour y remédier, Bonazzola *et al.* [27] définissent plutôt

$$\Psi = \left( \frac{\gamma}{f} \right)^{1/12}. \quad (1.29)$$

Étant écrit comme le quotient de deux déterminants,  $\Psi$  est un champ scalaire sur  $\Sigma_t$  et ainsi la métrique conforme est un tenseur.

Une métrique conformément reliée à la métrique plate spatiale  $\mathbf{f}$ ,  $\gamma_{ij} = \left( \frac{\gamma}{f} \right)^{1/3} f_{ij}$  est appelée métrique conformément plate. Dans notre étude sur les étoiles étranges binaires, nous supposons, comme dans la majorité des travaux sur les systèmes binaires, et ce par souci de simplicité, que la métrique spatiale est conformément plate.

Il est également pratique de décomposer la courbure extrinsèque en sa trace  $K$  et une partie sans trace  $A_{ij}$

$$K_{ij} = \Psi^4 A_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K. \quad (1.30)$$

Pour résoudre les équations de contraintes, on décompose ensuite habituellement la partie sans trace  $A_{ij}$ , d'une manière légèrement différente suivant l'approche utilisée. Notons qu'on monte les indices de la partie sans trace  $A_{ij}$  avec la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$ . On rencontre également dans la littérature une définition légèrement différente  $K_{ij} = A_{ij} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} K$  et dans ce cas on monte les indices de  $A_{ij}$  avec la métrique spatiale  $\gamma$ . Les équations qui suivent ont donc aussi des puissances de  $\Psi$  différentes entre ces deux conventions. Par la suite, nous utiliserons la convention de l'équation (1.30).

#### 1.2.4.2 Décomposition conforme transverse et sans trace

Dans la décomposition conforme transverse et sans trace, on introduit tout d'abord la courbure extrinsèque conforme et sans trace

$$\tilde{A}^{ij} = \Psi^6 A^{ij}. \quad (1.31)$$

Tout tenseur symétrique et sans trace peut être décomposer en un tenseur transverse et sans trace et une partie longitudinale, écrite comme le gradient symétrique et sans trace d'un vecteur [157]. On écrit donc  $\tilde{A}^{ij}$  comme

$$\tilde{A}^{ij} = \tilde{A}_{TT}^{ij} + \tilde{A}_L^{ij}, \quad (1.32)$$

où la partie transverse  $\tilde{A}_{TT}^{ij}$  est à divergence nulle et la partie longitudinale  $\tilde{A}_L^{ij}$  satisfait

$$\tilde{A}_L^{ij} = \tilde{D}^i X^j + \tilde{D}^j X^i - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_k X^k \equiv \left( \tilde{L} X \right)^{ij}, \quad (1.33)$$

où  $\tilde{D}$  est la dérivée covariante par rapport à la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$ ,  $X^i$  est le potentiel vecteur et  $\tilde{L}$  est appelé opérateur de Killing conforme.



En insérant ces quantités conformes dans l'équation de contrainte hamiltonienne (1.19), on obtient

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k \Psi = \frac{\Psi}{8} \tilde{R} - \Psi^5 \left( 2\pi E - \frac{K^2}{12} \right) - \frac{1}{8} \tilde{A}_{kl} \tilde{A}^{kl} \Psi^{-7} \quad (1.34)$$

et la contrainte impulsionnelle (1.20) devient

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k X^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k X^k + \tilde{R}^i_k X^k = 8\pi \Psi^{10} J^i + \frac{2}{3} \Psi^6 \tilde{D}^i K. \quad (1.35)$$

La contrainte impulsionnelle est linéaire en  $X^i$ . Et en feuilletage maximal ( $K = 0$ ) et dans le vide ( $J^i = 0$ ), elle est indépendante de  $\Psi$  et se découple donc de la contrainte hamiltonienne.

Dans la décomposition conforme transverse et sans trace, nous avons initialement douze variables indépendantes : six pour la métrique spatiale  $\gamma_{ij}$ , dont un pour le facteur conforme  $\Psi$  et cinq pour la métrique conforme  $\tilde{\gamma}_{ij}$ , et six pour la courbure extrinsèque  $K_{ij}$ , dont un pour la trace de la courbure extrinsèque  $K$ , trois pour la partie longitudinale  $\tilde{A}_L^{ij}$  et deux pour la partie transverse et sans trace  $\tilde{A}_{TT}^{ij}$ . Sur ces douze degrés de liberté, quatre sont déterminées par les équations de contraintes, le facteur conforme par la contrainte hamiltonienne et la partie longitudinale de la courbure extrinsèque par la contrainte impulsionnelle.

On compte donc huit données libres à spécifier, à choisir avant de résoudre les équations de contraintes :  $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $K$  et  $\tilde{A}_{TT}^{ij}$ . Sur ces huit variables, quatre sont associées à la liberté de coordonnées, trois pour les coordonnées spatiales cachées dans la métrique conforme, et une qui détermine l'évolution temporelle, souvent identifiée avec  $K$ . Il reste donc quatre fonctions libres à spécifier, deux pour la métrique conforme et deux pour la partie transverse et sans trace de la courbure extrinsèque, reflétant les deux degrés de liberté dynamiques du champ gravitationnel.

### 1.2.4.3 Décomposition Sandwich conforme

Dans la décomposition conforme transverse et sans trace, on détermine  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$  sur une hypersurface spatiale  $\Sigma_0$ , mais la solution ne connaît rien sur l'évolution temporelle à partir de cette hypersurface. Au contraire, la décomposition sandwich conforme fournit la donnée de  $\gamma_{ij}$  sur deux tranches (d'où son nom) où plutôt, dans le cas de deux tranches infinitésimalement séparés, la donnée de  $\gamma_{ij}$  et sa dérivée temporelle.

On commence donc par définir  $\tilde{u}^{ij}$  la dérivée temporelle de la métrique conforme

$$\tilde{u}^{ij} = \partial_t \tilde{\gamma}^{ij}. \quad (1.36)$$

On réécrit alors la relation cinématique (1.22) entre  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$  sous la forme

$$A^{ij} = \frac{1}{2N} \left[ \left( \tilde{L}_\beta \right)^{ij} + \tilde{u}^{ij} \right]. \quad (1.37)$$

L'équation de contrainte hamiltonienne (1.19) est tout comme en décomposition transverse et sans trace une équation pour le facteur conforme et devient

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k \Psi = \frac{\Psi}{8} \tilde{R} - \Psi^5 \left( 2\pi E + \frac{1}{8} A_{kl} A^{kl} - \frac{K^2}{12} \right) \quad (1.38)$$

tandis que la contrainte impulsionnelle (1.20) devient une équation pour le vecteur shift

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k \tilde{D}^k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k \beta^k + \tilde{R}^i_k \beta^k &= 2N \left( 8\pi \Psi^4 J^i + \frac{2}{3} \tilde{D}^i K \right) \\ &\quad - \tilde{D}_k \tilde{u}^{ik} + 2N A^{ik} \tilde{D}_k \ln (N \Psi^{-6}). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Pour construire une solution dans cette formulation sandwich conforme, on choisit une métrique conforme  $\tilde{\gamma}_{ij}$  et sa dérivée temporelle  $\tilde{u}_{ij}$ , ainsi qu'une fonction lapse  $N$  et la trace de la courbure extrinsèque  $K$ . On est alors en mesure de résoudre la contrainte hamiltonienne et la contrainte impulsionnelle pour le facteur conforme  $\Psi$  et le vecteur shift  $\beta^i$ . Avec ces solutions, on peut construire  $A^{ij}$  à partir de l'équation (1.37), et finalement les quantités physiques  $\gamma_{ij}$  et  $K_{ij}$ .

Dans ce formalisme, on compte seize variables indépendantes dont douze que l'on peut choisir librement ( $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $\tilde{u}_{ij}$ ,  $N$ ,  $K$ ) et quatre fixées par les contraintes ( $\Psi$ ,  $\beta^i$ ). Les quatre variables supplémentaires par rapport à la décomposition conforme transverse et sans trace sont assignées à la fonction lapse et au vecteur shift, qui décrivent comment les coordonnées évoluent d'une hypersurface à une autre. L'approche sandwich conforme prend en compte l'évolution de la métrique à partir de l'hypersurface  $\Sigma_0$  et nécessite la connaissance des coordonnées au delà de cette hypersurface. Ces quatre nouveaux degrés de liberté reflètent donc la dérivée temporelle des coordonnées.

Dans la plupart des travaux actuels utilisant le formalisme sandwich conforme, on choisit de plus la dérivée temporelle  $\dot{K} = \partial_t K$  comme fonction libre. Cela conduit à une équation de "contrainte" pour la fonction lapse  $N$ , obtenue à partir de la trace de l'équation d'évolution pour la courbure extrinsèque (1.21)

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k N + 2\tilde{D}_k \ln \Psi \tilde{D}^k N = \Psi^4 \left[ N \left( 4\pi (E + S) + A_{kl} A^{kl} + \frac{K^2}{3} \right) + \beta^k \tilde{D}_k K - \dot{K} \right], \quad (1.40)$$

Le lapse n'est donc plus un paramètre libre et il est remplacé par  $\dot{K}$ . On a donc toujours douze variables libres ( $\tilde{\gamma}_{ij}$ ,  $\tilde{u}_{ij} = \dot{\tilde{\gamma}}_{ij}$ ,  $K$ ,  $\dot{K}$ ) mais cinq ( $\Psi$ ,  $\beta^i$ ,  $N$ ) fixées par les équations.

Le formalisme sandwich conforme est particulièrement intéressant pour la construction de systèmes en équilibre ou en quasi-équilibre, où il est naturel de choisir

$$\tilde{u}_{ij} = 0. \quad (1.41)$$

Pour l'étude des binaires d'étoiles de quarks étranges ou de trous noirs que l'on retrouve dans cette thèse, on utilise cette décomposition sandwich conforme, bien adaptée à la description de systèmes binaires en quasi-équilibre.

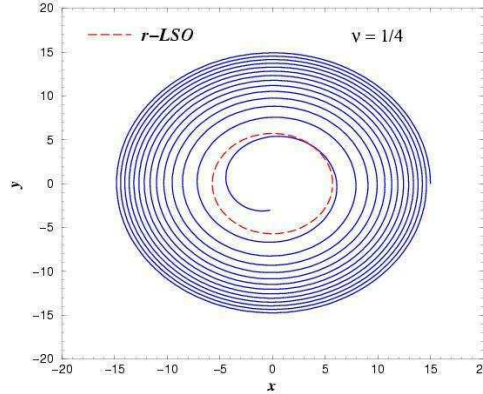


FIG. 1.3 – Trajectoire d’un des éléments d’un système binaire dans le système du centre de masse. Calcul effectif à un corps à 2.5-PN, d’après Damour *et al.* [34].

## 1.3 Système binaire

### 1.3.1 État de quasi-équilibre

D’après la relativité générale, un système binaire d’objets compacts perd de l’énergie et du moment cinétique par émission d’ondes gravitationnelles, provoquant le rapprochement des deux objets. De plus, l’émission d’ondes gravitationnelles tend à diminuer l’excentricité des orbites, à les circulariser. Comme le montre la figure 1.3, les astres compacts décrivent une spirale, dans le système du centre de masse, et se rapprochent jusqu’à la collision puis la fusion des deux objets. Le cercle en pointillés rouge, correspondant à la dernière orbite stable, délimite deux phases distinctes de l’évolution du système binaire. Au delà de cette orbite, lorsque les deux objets sont suffisamment éloignés, le temps caractéristique de la perte d’énergie est très grande devant la période orbitale. C’est à dire que la vitesse radiale est très petite devant la vitesse orbitale. On peut donc décrire le système par une succession d’orbites circulaires, c’est l’approximation de **quasi-équilibre**.

Au delà de la dernière orbite stable, l’approximation de quasi-équilibre n’est plus valide. On atteint un régime dynamique, c’est la coalescence des deux objets.

Dans le problème des données initiales du formalisme 3+1, on s’intéresse aux dernières orbites circulaires, c’est à dire la fin de la phase de quasi-équilibre. Le fait de supposer que les orbites sont circulaires revient à supposer l’existence d’un **vecteur de Killing hélicoïdal**. Voyons ce que cela signifie.

### 1.3.2 Symétrie hélicoïdale

Tout d’abord, un vecteur de Killing  $\xi$  est un vecteur qui satisfait

$$\mathcal{L}_\xi \gamma_{ij} = 0, \quad (1.42)$$

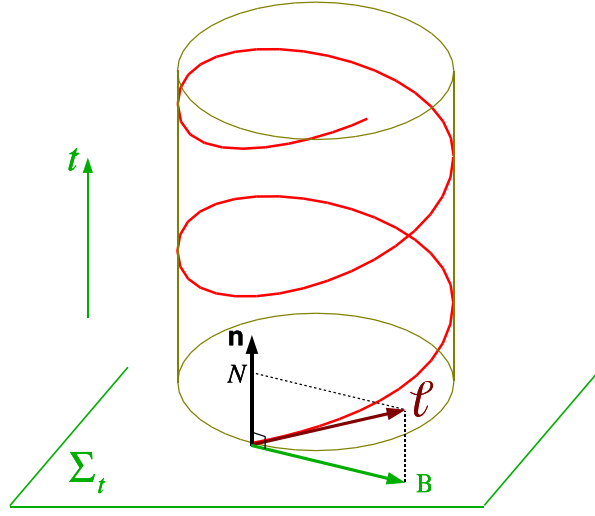


FIG. 1.4 – Hélice décrite par le vecteur de Killing hélicoïdal  $l^\alpha$ , admettant la décomposition 3+1 :  $l = N\mathbf{n} + \mathbf{B}$ .

c'est-à-dire que la métrique est invariante dans la direction de  $\xi$ . Il est possible de trouver un système de coordonnées dans lequel la métrique est indépendante d'une des coordonnées.

Pour un objet sur une orbite circulaire, il est naturel de penser que le fait de se déplacer le long de l'orbite laisse invariante la métrique spatiale. Un vecteur de Killing hélicoïdal  $l^\alpha$  est défini par [28, 60]

$$l^\alpha = k^\alpha + \Omega m^\alpha, \quad (1.43)$$

où  $\Omega$  est une constante, identifiée à la vitesse orbitale,  $k$  est un vecteur de genre temps, au moins loin du système binaire,  $m$  est de genre espace, a des orbites fermées et est nul sur une 2-surface de genre temps appelée axe de rotation.

Explicitons le vecteur de Killing hélicoïdal dans un système de coordonnées quasi-inertielles, où la métrique se réduit à celle de Minkowski à l'infini spatial. En choisissant un système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  où  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées sphériques sur l'hypersurface  $\Sigma_t$ , on peut écrire le vecteur de Killing hélicoïdal

$$l^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha + \Omega \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^\alpha \quad (1.44)$$

Ce vecteur décrit une hélice dans l'espace-temps, représentée sur la figure 1.4. Si l'on réécrit le vecteur temps coordonnée en fonction des quantités 3+1, donné par l'équation (1.8), on peut écrire le vecteur de Killing sous la forme

$$l = N\mathbf{n} + \mathbf{B}, \quad (1.45)$$

où  $\mathbf{B}$  est le vecteur shift associé aux coordonnées cotournantes donné par  $\mathbf{B} = \beta + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}$ .

En coordonnées cotournantes  $(t, r, \theta, \varphi')$ , on choisit  $\varphi' = \varphi - \Omega t$ , de telle sorte que le vecteur de Killing soit le premier vecteur de la base naturelle associée à  $(t, r, \theta, \varphi')$ , c'est-à-dire

$$l^\alpha = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^\alpha. \quad (1.46)$$

Dans ce système de coordonnées, et dans le formalisme sandwich conforme, il est naturel de poser  $\tilde{u}_{ij} = 0$  comme on l'a remarqué au niveau de l'équation (1.41).

# Chapitre 2

## Ondes Gravitationnelles

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Existence</b>	<b>23</b>
<b>2.2</b>	<b>Description - Champs faibles</b>	<b>24</b>
2.2.1	Ondes planes	24
2.2.2	Jauge TT	25
2.2.3	Polarisation d'une onde plane	26
<b>2.3</b>	<b>Sources d'ondes gravitationnelles</b>	<b>28</b>
2.3.1	Formule du quadrupôle	28
2.3.2	Luminosité gravitationnelle	29
2.3.3	Sources astrophysiques	30
<b>2.4</b>	<b>Détection des ondes gravitationnelles</b>	<b>32</b>
2.4.1	Historique	32
2.4.2	Défi technologique	32
2.4.3	Barres résonnantes	32
2.4.4	Interféromètres au sol	33
2.4.5	Interféromètre spatial LISA	35

---

### 2.1 Existence

Dès 1916, un an seulement après l'énoncé des équations de la relativité générale, Einstein montra qu'il existe, à l'approximation linéaire et dans le vide, une solution qui décrit la propagation d'une onde. Néanmoins, le caractère intrinsèquement non linéaire de la théorie fit que la réalité physique de ces ondes gravitationnelles a été mise en doute. Il paraissait concevable qu'il s'agisse d'un effet dû à un mauvais choix de coordonnées.

Cette question ne fut éclaircie que bien plus tard, tout d'abord d'un point de vue théorique

par Pirani [116], puis d'un point de vue observationnel par la découverte en 1974 par Hulse et Taylor du système binaire d'étoiles à neutrons PSR 1913+16 [86]. Par l'observation des ondes radio émises par ce système, ils ont montré que la période orbitale, d'environ huit heures, décroissait légèrement, d'environ un millièrme de seconde par an. Cette diminution s'interprète comme la perte, par le système, d'énergie émise sous forme d'ondes gravitationnelles, provoquant ainsi le rapprochement des deux étoiles. L'accord quantitatif avec la prédiction de la relativité générale est remarquable : 0.35 % (voir figure 2.1). Cette preuve indirecte de l'existence des ondes gravitationnelles value le prix Nobel de Physique 1993 à Hulse et Taylor.

## 2.2 Description - Champs faibles

Afin de décrire un espace-temps perturbé par le passage d'une onde, on se place dans l'approximation de champs faibles de la relativité générale. Pour cela on écrit la métrique sous la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (2.1)$$

où  $\eta$  est la métrique plate (espace temps de Minkowski) et  $h$  est une petite perturbation. Le tenseur de Ricci devient, en ne conservant que les termes linéaires en  $h_{\mu\nu}$  :

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\sigma \partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial_\mu \partial_\nu h - \square h_{\mu\nu}), \quad (2.2)$$

où  $h$  est la trace de la perturbation définie par  $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$  et  $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$  est le dalembertien associé à la métrique plate.

Il est en fait plus pratique de travailler avec une description un peu différente de la perturbation :

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (2.3)$$

de telle sorte que les équations d'Einstein dans le vide  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$  gardent la même forme que l'Eq. (2.2) avec  $h_{\mu\nu}$  remplacé par  $\bar{h}_{\mu\nu}$  et  $R_{\mu\nu}$  par  $G_{\mu\nu}$ .

Sans perdre de généralité, on peut imposer une condition de jauge dite harmonique telle que

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

qui est l'analogie tensoriel de la jauge de Lorentz en électromagnétisme. Les équations d'Einstein deviennent donc simplement :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

### 2.2.1 Ondes planes

Puisque le Dalembertien en espace plat s'écrit  $\square = -\partial_t^2 + \nabla^2$ , l'équation (2.5) est une équation d'onde pour  $\bar{h}_{\mu\nu}$ . La solution de cette équation est une superposition d'ondes planes donnée par

$$\bar{h}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (2.6)$$

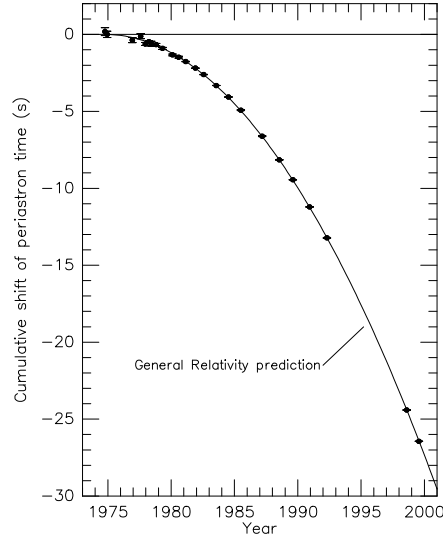


FIG. 2.1 – Décroissance de la période orbitale du pulsar binaire PSR 1913+16 mesurée par le décalage des instants de passage au périastre par rapport au cas d’une orbite de période constante. La courbe en trait plein correspond à la prédiction de la relativité générale et les points sont les mesures expérimentales (d’après Lorimer [99]).

où  $C_{\mu\nu}$  est un tenseur symétrique constant et  $\mathbf{k}$  est le vecteur d’onde.

Afin que  $\bar{h}$  vérifie l’équation d’onde (2.5) ainsi que la jauge harmonique (2.4),  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{C}$  doivent satisfaire

$$k_\sigma k^\sigma = 0 \quad (2.7)$$

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

Le vecteur d’onde est orthogonal à  $C_{\mu\nu}$  ce qui réduit le nombre de composantes indépendantes de  $C_{\mu\nu}$  de dix à six.

### 2.2.2 Jauge TT

Cependant, le choix de la condition de jauge harmonique ne fixe pas complètement le système de coordonnées. En effet, il subsiste une ambiguïté levée par un choix de jauge supplémentaire, une transformation de coordonnées infinitésimale  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$  avec  $\xi^\mu$  un champ de vecteurs. Sous cette transformation,  $\bar{h}_{\mu\nu}$  devient  $\bar{h}_{\mu\nu} + \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}$  donc  $\xi^\mu$  doit vérifier

$$\square \xi^\mu = 0 \quad (2.9)$$

afin que la condition de jauge harmonique (2.4) soit toujours satisfaite. C’est bien sûr une équation d’onde pour  $\xi^\mu$ . Choisissons la solution sous la forme

$$\xi^\mu = B^\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (2.10)$$



où  $k_\sigma$  est le vecteur d'onde de notre onde gravitationnelle et  $\mathbf{B}$  est un vecteur constant. Cette transformation de coordonnée induit un changement pour  $C_{\mu\nu}$

$$C_{\mu\nu} \longrightarrow C_{\mu\nu} - i(k_\mu B_\nu + k_\nu B_\mu - \eta_{\mu\nu} k_\sigma B^\sigma). \quad (2.11)$$

On appelle **jauge transverse et sans trace** (jauge TT), une jauge harmonique satisfaisant

$$u_\mu C^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{transverse}) \quad (2.12)$$

$$C^\mu{}_\mu = \eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{sans trace}) \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{u}$  est une 4-vitesse constante. Notons que le choix du vecteur  $\mathbf{u}$  fixe complètement le système de coordonnées (une fois  $\mathbf{u}$  fixé, on peut obtenir une écriture explicite de  $\mathbf{B}$  et donc de  $\xi^\mu$ ).

En jauge TT, l'amplitude de l'onde gravitationnelle  $C_{\mu\nu}$  à dix composantes indépendantes moins les quatre conditions de jauge harmonique (2.8), moins les trois conditions de transversalité (2.12) (la quatrième étant déjà comptée dans (2.8)) et la condition de trace nulle (2.13). On compte donc deux composantes libres de l'amplitude de l'onde qui représentent les deux degrés de liberté, les deux états de polarisation de l'onde.

Il est pratique de choisir le vecteur  $\mathbf{u}$  comme étant la quadri-vitesse d'observateurs inertiels (i.e.  $u^0 = 1$  et  $u^j = 0$ ) afin de n'avoir que les composantes spatiales de  $\bar{h}$  non nulles (d'après (2.12)). Une onde plane monochromatique se propageant selon  $z$ , c'est-à-dire  $k^\mu = (1, 0, 0, 1)$ , sera alors donnée par

$$\bar{h}_{ij}^{TT} = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

où on a utilisé les équations (2.8) et (2.13) ainsi que la relation  $\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = \bar{h}_{\mu\nu}$  valable en jauge TT. On appelle polarisation rectiligne + (respectivement polarisation rectiligne x) le cas où  $h_x = 0$  (respectivement  $h_+ = 0$ ).

### 2.2.3 Polarisation d'une onde plane

Afin d'avoir une intuition sur les effets physiques dus aux ondes gravitationnelles, on considère le mouvement de particules tests en présence d'une onde. Pour obtenir une mesure de

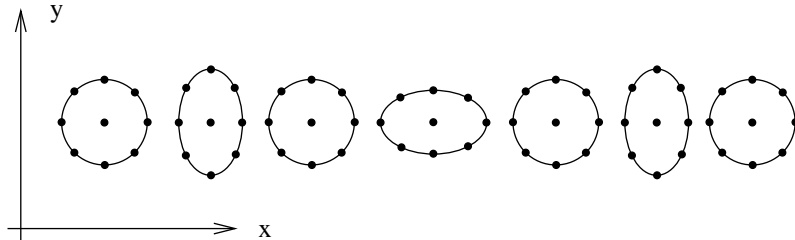


FIG. 2.2 – Action d'une onde gravitationnelle plane de polarisation + se propageant selon  $z$  sur un anneau circulaire de particules matérielles.

## 2.2. DESCRIPTION - CHAMPS FAIBLES

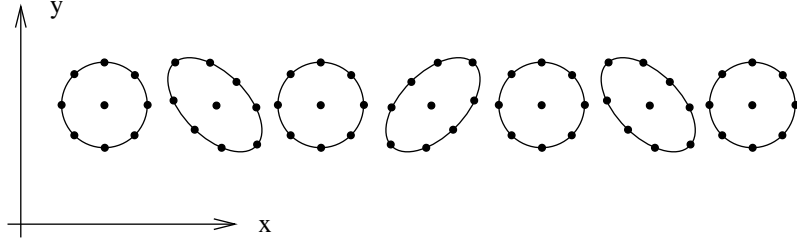


FIG. 2.3 – Action d’une onde gravitationnelle plane de polarisation x se propageant selon  $z$  sur un anneau circulaire de particules matérielles.

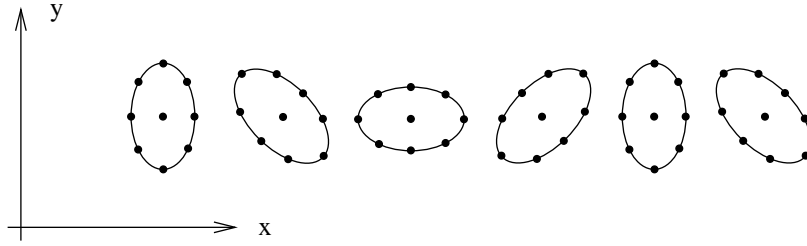


FIG. 2.4 – Action d’une onde gravitationnelle plane de polarisation droite se propageant selon  $z$  sur un anneau elliptique de particules matérielles.

ces effets indépendante des coordonnées, on utilise l’équation de déviation géodésique. Si on appelle  $U^\mu$  la quadri-vitesse des particules et  $S^\mu$  le vecteur séparant les géodésiques, elle s’écrit

$$\nabla_u \nabla_u S^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma. \quad (2.15)$$

En explicitant les deux membres et en ne gardant que les termes au premier ordre en  $\bar{h}_{\mu\nu}$ , l’équation de déviation géodésique devient

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{h}^\mu_\sigma \quad (2.16)$$

Pour une onde se propageant selon  $z$ , cela signifie que seul  $S^1$  et  $S^2$  sont affectés, c’est-à-dire que les particules tests n’ont un mouvement que dans les directions perpendiculaires au vecteur d’onde.

Considérons tout d’abord l’effet d’une onde de polarisation circulaire + ( $h_x = 0$ ). Si l’on écrit  $h_+ = C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}$ , l’équation (2.16) donne à l’ordre le plus bas

$$S^1 = \left(1 + \frac{1}{2} C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^1(0) \quad (2.17)$$

$$S^2 = \left(1 - \frac{1}{2} C_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}\right) S^2(0). \quad (2.18)$$

Ainsi, les particules initialement séparées selon  $x^1$  vont osciller dans cette même direction, et la même chose pour celles ayant une séparation selon  $x^2$ . Un anneau circulaire de particules stationnaires dans le plan  $x - y$  sera donc déformé par le passage de l'onde en une ellipse pulsante de la forme d'un "+", avec une fréquence  $\omega = k_0$  (voir figure 2.2) justifiant le nom donné à cette polarisation.

La même analyse peut être faite pour le cas où  $h_+ = 0$ , et dans ce cas l'anneau de particules est déformé en une ellipse pulsante de la forme d'un "x", avec une fréquence  $\omega = k_0$  (voir figure 2.3).

On peut aussi définir les polarisations circulaires gauches et droites en prenant une combinaison linéaire des deux polarisations rectilignes

$$C_D = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_+ + iC_x), \quad (2.19)$$

$$C_G = \frac{1}{\sqrt{2}} (C_+ - iC_x) \quad (2.20)$$

L'effet d'une onde circulaire droite est illustré sur la figure 2.4. Les particules bougent selon un cercle dans la direction droite (sens trigonométrique pour une onde se propageant vers le lecteur). Notons que les particules individuelles ne voyagent pas à travers l'anneau mais font une rotation sur de petits cercles.

## 2.3 Sources d'ondes gravitationnelles

### 2.3.1 Formule du quadrupôle

Afin de calculer les différentes caractéristiques, fréquence, amplitude, des ondes gravitationnelles émises par une source, on doit considérer les équations d'Einstein linéarisées non plus dans le vide mais en présence d'un tenseur énergie-impulsion correspondant à la source, c'est-à-dire

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16 \frac{G}{c^4} \pi T_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

On obtient alors la solution retardée (voir Blanchet [22] pour plus de détails)

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{y}) d^3y. \quad (2.22)$$

En se plaçant dans l'approximation d'une source lointaine, isolée et faiblement relativiste (vitesse caractéristique très inférieure à la vitesse de la lumière), on obtient, dans la jauge TT, la formule du quadrupôle (seule la partie spatiale est non nulle)

$$\bar{h}_{ij}(t, \mathbf{x}) = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{R} \frac{d^2 Q_{ij}^{\text{TT}}}{dt^2}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \mathbf{x}), \quad (2.23)$$

### 2.3. SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES

où  $R$  est la distance à la source et  $Q_{ij}^{TT}$  est le moment quadrupolaire newtonien donné par l'intégrale sur la source

$$Q_{ij}^{TT}(t, \mathbf{x}) = \left( P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right) \int \rho(t, \mathbf{x}) \left( x_k x_l - \frac{1}{3} x^2 \delta_{kl} \right) dV \quad (2.24)$$

avec  $P_{ij} = \delta_{ij} - x_i x_j / r^2$  le tenseur de projection sans trace et transverse à la direction de la source et  $\rho$  la densité de matière newtonienne, c'est-à-dire  $\rho \sim T^{00}$ .

#### 2.3.2 Luminosité gravitationnelle

Le calcul de la luminosité gravitationnelle de la source définie par  $L = dE/dt$  donne

$$L = \frac{G}{5c^5} \left\langle \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right\rangle \quad (2.25)$$

où les crochets indiquent une moyenne sur plusieurs longueurs d'onde. Notons  $M$  la masse de la source et  $R$  sa taille caractéristique, son moment quadrupolaire est de l'ordre de  $Q \sim s M R^2$  où  $s$  est un facteur d'asymétrie valant zéro pour un objet à symétrie sphérique. Si on introduit une fréquence d'évolution  $\omega$ , l'équation (2.25) devient

$$L \sim \frac{G}{5c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4 \quad (2.26)$$

La faiblesse du facteur  $\frac{G}{5c^5} \sim 3 \times 10^{-53} \text{ S.I.}$  explique pourquoi il est illusoire d'espérer détecter des ondes gravitationnelles émises par une expérience en laboratoire. Prenons un cylindre d'acier d'un mètre de rayon, de 20 mètres de long, pesant 490 tonnes et tournant à la vitesse limite de rupture de l'acier ( $\omega = 28 \text{ rad.s}^{-1}$ ). Il fournit une luminosité extrêmement faible  $L = 2 \times 10^{-29} \text{ W}$  !

Cependant, en réexprimant cette dernière formule en fonction du rayon de Schwarzschild  $R_s = 2GM/c^2$  on peut s'apercevoir que pour des sources astrophysiques, cette luminosité peut devenir énorme. En effet, si  $v$  est une vitesse caractéristique de la source telle que  $\omega \sim v/R$ , on obtient

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \left( \frac{R_s}{R} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6. \quad (2.27)$$

Ainsi, pour des astres compacts très asymétriques et relativistes, la puissance émise sous forme d'onde gravitationnelle devient gigantesque  $\sim 10^{52} \text{ W}$  soit  $10^{26}$  fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique.

Cependant, même pour de telles sources astrophysiques l'amplitude typique  $h$  de l'onde gravitationnelle reçue sur Terre est extrêmement faible et typiquement  $h \sim 10^{-21}$ . Sachant qu'une onde gravitationnelle provoque une variation de la distance entre deux points telle que (voir les équations (2.17) et (2.18))

$$\frac{\delta L}{L} \sim h, \quad (2.28)$$

il est nécessaire de construire des détecteurs extrêmement sensibles pour avoir un espoir de détecter une source astrophysique.

### 2.3.3 Sources astrophysiques

Les ondes gravitationnelles sont produites lorsqu'une masse subit une accélération, et sont en ce sens analogues aux ondes électromagnétiques qui sont émises lorsqu'une charge est accélérée. Cependant l'existence d'un seul signe de masse, avec la conservation de l'impulsion, implique qu'il n'existe ni terme monopolaire ni dipolaire dans l'émission d'ondes gravitationnelles. Par contre, comme nous venons de le voir dans la section précédente, l'émission quadrupolaire existe bien et elle est d'autant plus importante que l'objet brise la symétrie sphérique, que la vitesse est importante et l'objet très compact.

Présentons brièvement certaines de ces sources qui satisfont ces conditions, et que l'on peut répartir en trois groupes :

- **les sources périodiques** qui émettent un rayonnement régulier et durable, et sont bien localisées. On y trouve les systèmes binaires d'objets compacts (étoiles à neutrons, trous noirs, naines blanches) avant la phase de coalescence mais aussi les oscillations de ces mêmes objets.
- **les sursauts** qui sont des sources bien localisées dans l'espace mais limitées dans le temps. Ils sont liés à des événements catastrophiques tels que la coalescence d'objets compacts ou les supernovae.
- **le fond stochastique** composé du rayonnement cosmologique primordial et d'une superposition d'un très grand nombre de sources périodiques.

#### 2.3.3.1 Étoiles à neutrons en rotation

Pour avoir des sources périodiques qui produisent des ondes d'amplitudes importantes, on doit avoir des objets très compacts, tels des étoiles à neutrons ou des trous noirs, qui peuvent atteindre des vitesses de rotation très élevées. Cependant, une étoile à neutrons en rotation et en équilibre est axisymétrique et n'émet donc pas d'ondes gravitationnelles. Toutefois, il existe différents mécanismes susceptibles de briser cette symétrie. On peut citer par exemple une déformation due au champ magnétique intense de l'étoile à neutrons, une irrégularité de la croûte solide de l'étoile ou encore une brisure spontanée de la symétrie axiale (voir Bonazzola *et al.* [26]). Certains modes d'oscillations des étoiles à neutrons, tels que les r-modes [3], s'accompagnent d'un moment quadrupolaire de masse variant dans le temps, mais aussi parfois de multipôles de courant.

Tous ces phénomènes sont susceptibles de provoquer l'émission d'ondes gravitationnelles et pourraient être détectés. En ce qui concerne cette détection, l'émission a l'avantage d'être continue permettant d'intégrer sur de longs laps de temps et ainsi augmenter la sensibilité. La détection de ces ondes, grâce au détail du spectre des modes d'oscillations par exemple, serait une sonde de la structure et de l'équation d'état des étoiles à neutrons, comme l'héliosismologie est une sonde de l'intérieur du Soleil.

#### 2.3.3.2 Supernovae

On distingue plusieurs types de supernovae : les supernovae thermonucléaires de type Ia d'un côté et les supernovae gravitationnelles de type II, Ib et Ic. Les progéniteurs des superno-

## 2.3. SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES

---

vae gravitationnelles sont des étoiles massives, de masse supérieure à  $\sim 10M_{\odot}$ . L'étoile produit, par des réactions de fusion, les éléments lourds jusqu'au fer, l'élément le plus stable de la nature. Lorsque la masse du cœur de fer atteint la masse de Chandrasekhar, l'étoile s'effondre sous l'effet de son propre poids. Le produit de cet effondrement pourra être soit une étoile à neutrons soit un trou noir. Il y a une vingtaine d'années ces supernovae étaient considérées comme l'une des meilleures sources d'ondes gravitationnelles. Mais des simulations numériques ont montré depuis que l'effondrement était quasiment sphérique et que l'énergie émise l'était principalement sous forme de neutrinos si bien que le signal gravitationnel est assez faible. Cependant de nombreuses études numériques sont encore actuellement en cours pour comprendre la physique d'un tel effondrement.

Quant aux supernovae de type Ia, provoquées, d'après le modèle standard, par l'explosion thermonucléaire d'une naine blanche, on ne prévoit pas d'émission d'ondes gravitationnelles importantes.

### 2.3.3.3 Coalescence de binaires compactes

La coalescence des systèmes binaires compacts, étoiles à neutrons, trous noirs, constitue la source la plus prometteuse d'être détectée par les interféromètres au sol. Les binaires de naines blanches seront quant à elles détectées par les interféromètres spatiaux. Une binaire constituée de tels objets est très relativiste et ne peut donc pas être strictement stationnaire car elle émet nécessairement des ondes gravitationnelles, qui emportent de l'énergie et du moment cinétique. Cela conduit à la circularisation des orbites [113] mais surtout au rapprochement des deux astres qui décrivent une spirale dans le système du centre de masse. Lorsque la séparation des deux objets atteint une valeur critique, on atteint la phase de coalescence proprement dite et le "plongeon" des astres l'un vers l'autre. Ils finissent alors par entrer en collision et fusionner pour donner comme produit final, soit une étoile à neutrons soit un trou noir.

Cette thèse s'intéresse pour l'essentiel à la fin de la phase de spirale, où l'on peut encore considérer les orbites comme étant circulaires. La comparaison entre les résultats des simulations numériques et les observations devraient entre autre fournir des informations sur les équations d'état de la matière ultra-dense.

### 2.3.3.4 Fond stochastique

Les ondes gravitationnelles interagissant extrêmement peu avec la matière, elles voyagent presque sans difficultés à travers l'Univers depuis qu'elles ont été générées. Alors que le rayonnement de fond cosmologique à 3K reflète l'Univers à  $t \sim 10^5$  ans après le Big Bang, les ondes gravitationnelles se sont découplées de la matière à un temps de l'ordre du temps de Planck après le Big Bang. Observer ce fond gravitationnel serait sans aucun doute l'une des plus importantes mesures que l'astronomie gravitationnelle pourrait faire. Par ailleurs, divers autres objets ou phénomènes cosmologiques ont pu générer des ondes gravitationnelles de manière notable. Citons par exemple les cordes cosmiques, les formations de domaines dans les transitions de phase...

A ce fond cosmologique, il convient d'ajouter le rayonnement de la superposition incohé-

rente de toutes les sources mentionnées ci-dessus et plus généralement de toutes les sources astrophysiques de l'Univers observable.

## 2.4 Détection des ondes gravitationnelles

### 2.4.1 Historique

Le premier instrument destiné à détecter le rayonnement gravitationnel, une barre résonnante, fût construite par Joseph Weber dans les années soixante [143]. Les barres résonnantes, composées de cylindres massifs en aluminium, utilisent l'étroite résonance du métal pour obtenir leur sensibilité nominale, qui est alors confinée dans une étroite bande de fréquence autour de la fréquence de résonance.

Dans les années soixante dix, un certain nombre de groupes se sont tournés vers l'interférométrie laser comme base d'un nouveau type de détecteurs. Cette technique avait déjà été considérée par Weber mais la technologie dans les années soixante ne semblait pas indiquer que c'était un bon choix. Grâce aux améliorations dans les domaines des lasers et des miroirs, trois interféromètres prototypes étaient opérationnels dans les années quatre vingt, à Glasgow, à Garching et au MIT.

Bien que les barres résonnantes continuent à être développées, le meilleur espoir pour la première détection réside dans les grands interféromètres développés ces dernières années, tels que LIGO ou VIRGO. Dans la prochaine décade, on devrait également voir lancé l'interféromètre spatial LISA, qui cherchera des signaux à des fréquences plus faibles que les interféromètres au sol.

### 2.4.2 Défi technologique

Le problème pour le physicien expérimental est que les amplitudes des ondes gravitationnelles émises par un évènement astrophysique est, au voisinage de la Terre, extrêmement faible. Typiquement on a  $h \sim 10^{-21}$ , une longueur  $\sim 10^3$  m pour un interféromètre terrestre d'où une variation de distance à détecter  $\delta L \sim hL \sim 10^{-18}$  m. Étant donnée la faiblesse du signal, les sources de bruits doivent être réduites au maximum. Parmi les différentes sources de bruits, on peut citer le bruit thermique, les vibrations sismiques, le gradient du champ gravitationnel, etc... Cependant, pour chaque expérience les sources de bruits diffèrent, il en va donc de même pour les choix faits pour les réduire. Pour tous les détecteurs terrestres, néanmoins, le signal attendu est nettement plus faible que le bruit, d'où une nécessité de filtrer le signal afin de l'extraire du bruit.

### 2.4.3 Barres résonnantes

Une barre résonnante est un cylindre de métal généralement de plusieurs tonnes (voir figure 2.5). C'est en mesurant le signal acoustique que l'on essaie de détecter l'interaction du passage d'une onde gravitationnelle avec la barre. Une onde gravitationnelle excite les modes de vibration

## 2.4. DÉTECTION DES ONDES GRAVITATIONNELLES

---

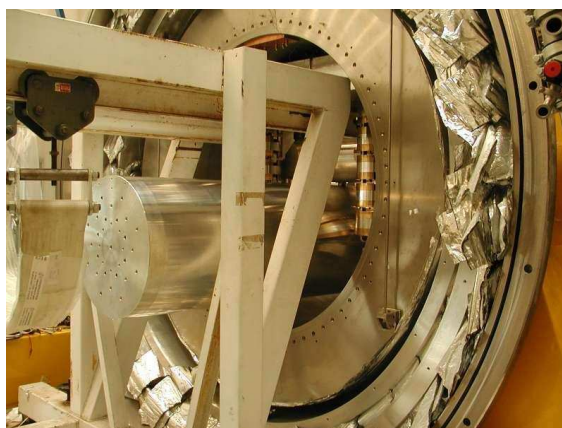


FIG. 2.5 – La barre résonnante AURIGA à Legnaro en Italie. (Source <http://www.auriga.inl.infn.it/>)

de la barre métallique qui, à la fréquence de résonance  $\sim 1$  kHz, devraient être détectable. A l'instar des détecteurs interférométriques, le jeu consiste à éliminer au maximum les sources de bruit. Les deux principales sources de bruit sont le bruit thermique dû à l'agitation thermique des atomes faisant vibrer la barre, et la conversion du signal acoustique en signal électrique. Pour diminuer le bruit thermique, les barres sont refroidies à de très basses températures, typiquement de  $1^\circ\text{K}$  à  $0.1^\circ\text{K}$ .

Le principal défaut des détecteurs acoustiques est leur bande passante étroite, de l'ordre de quelques Hertz contre quelques kiloHertz pour les détecteurs interférométriques. Et pour l'instant, malgré les gros progrès réalisés, les barres résonnantes en activité n'ont pas encore une sensibilité suffisante pour détecter un signal gravitationnel.

### 2.4.4 Interféromètres au sol

Il existe actuellement trois principaux interféromètres terrestres dans le monde [59] :

- **LIGO** (Laser Interferometer Gravitational-wave Observatory) consiste en trois interféromètres. L'un simple, de quatre kilomètres de long, à Livingston en Louisiane, et l'autre double (quatre kilomètres et deux kilomètres) à Hanford, dans l'état de Washington (figure 2.6). Les sites sont séparés d'environ 3000 kilomètres et sont situés de façon à permettre la coïncidence des événements.
- **VIRGO** est un interféromètre franco-italien de 3 km de long situé à Cascina en Italie (figure 2.7). Il est assez similaire à LIGO mais possède une isolation sismique très sophistiquée qui lui permet d'avoir une bonne sensibilité aux basses fréquences.
- **GEO600** est un interféromètre germano-britannique de 600 mètres situé près d'Hannovre en Allemagne. Malgré ses plus petits bras, il a une sensibilité comparable aux interféromètres multi-kilométriques.

A une plus petite échelle, **TAMA300** est un interféromètre de 300 m de long situé près de Tokyo. Il a pris des données depuis plusieurs années maintenant, même si l'on pense qu'aucune





FIG. 2.6 – Photo aérienne des deux interféromètres LIGO. A gauche, celui d’Hanford, dans l’état de Washington aux États-Unis, et à droite celui de Livingston en Louisiane. (Source <http://www.ligo.caltech.edu>)



FIG. 2.7 – Photo aérienne de VIRGO, à Cascina, près de Pise, en Italie) (Source <http://www.virgo.infn.it/>)

## 2.4. DÉTECTION DES ONDES GRAVITATIONNELLES

---

source astrophysique ne devrait être détectée par lui. L'équipe de TAMA développe actuellement un interféromètre de trois kilomètres, s'appuyant sur leur expérience acquise.

En Australie, **ACIGA** (The Australian Consortium for Interferometric Gravitational-Wave Astronomy) construisent un interféromètre de 80 mètres près de Perth, en espérant l'étendre à plusieurs kilomètres dans le futur. Un tel détecteur serait particulièrement intéressant puisque tous les autres interféromètres sont situés dans l'hémisphère nord et presque dans le même plan. Un détecteur australien serait très loin de ce plan, jouant un rôle important dans la détermination de la position des sources dans le ciel.

Tous fonctionnent selon le même principe : un faisceau laser est divisé en deux faisceaux sur deux bras orthogonaux. Ils sont ensuite réfléchis par un miroir puis recombinaison afin d'interférer (voir le schéma optique de l'interféromètre VIRGO sur la figure 2.8). Le passage d'une onde gravitationnelle contracte de manière différentielle les deux bras affectant le chemin optique des deux faisceaux et donc la figure d'interférence. Chaque bras étant une cavité de Fabry-Perot, chaque faisceau fait de l'ordre d'une centaine d'allers-retours dans les bras de l'interféromètre, augmentant la longueur optique du même rapport.

Les interféromètres ont une large bande passante, la sensibilité maximale est obtenue pour une bande de fréquence de 10 Hz à quelques kHz environ (voir la figure 2.9 pour les deux générations de LIGO et GEO 600). La sensibilité du détecteur VIRGO est comprise entre celles de LIGO I et LIGO II. Les sources de bruit pour ce genre de détecteurs sont également nombreuses [85]. On cite par exemple le bruit d'origine sismique, que l'on réduit énormément grâce à des pendules maintenant les miroirs pour les isoler du mouvement du sol. On peut signaler le fait que le système d'amortissement de VIRGO lui permet d'être sensible jusqu'à 10 Hz alors que LIGO est aveugle en dessous de 60 Hz. A plus haute fréquence, on compte aussi des bruits tels que la fluctuation d'origine quantique du nombre de photons, les vibrations thermiques des miroirs...

Voici le taux d'événements attendus par an pour les deux générations des détecteurs LIGO (d'après Belczynski *et al.* [19]) (EN pour Étoile à Neutrons et TN pour Trou Noir).

Type de binaire	LIGO initial	LIGO avancé
EN - EN	$1 \times 10^{-2}$	$6 \times 10^1$
TN - EN	$2 \times 10^{-2}$	$8 \times 10^1$
TN - TN	$8 \times 10^{-1}$	$2 \times 10^3$

Alors que pour la première génération, le nombre d'événements total ne devrait pas excéder un par an, on s'attend à plusieurs centaines d'événements pour la seconde génération ce qui pourrait permettre de faire une statistique des sources observées.

### 2.4.5 Interféromètre spatial LISA

Il n'y a aucune chance de détecter des ondes gravitationnelles dans la bande de fréquence  $10^{-5}\text{Hz} < f < 1\text{ Hz}$  avec un instrument terrestre : même s'il était possible d'isoler complètement un détecteur des mouvements du sol, le bruit dû aux fluctuations de gravité sur Terre est

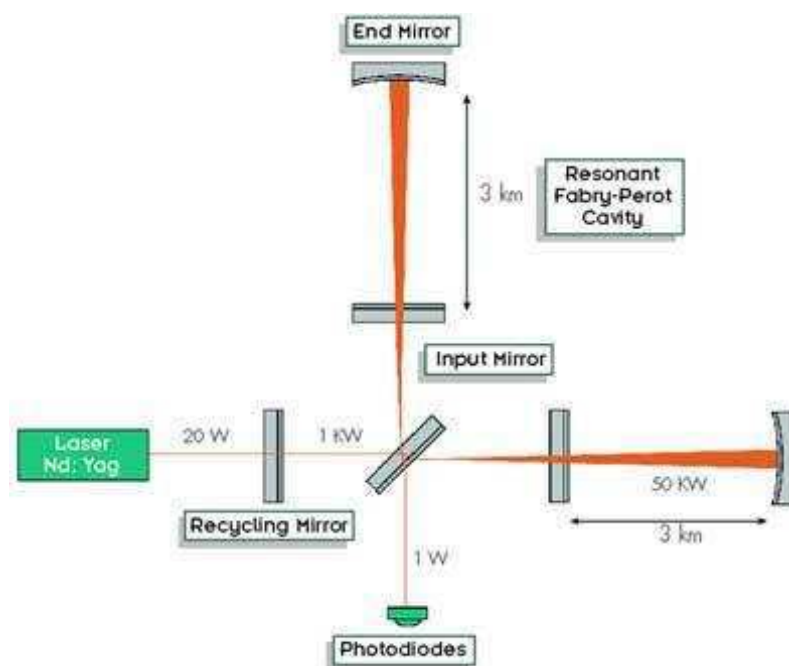


FIG. 2.8 – Schéma optique de l'interféromètre VIRGO. (Source <http://lapp-web.in2p3.fr/virgo/gw.html>)

beaucoup plus important que l'amplitude des ondes gravitationnelles attendues pour les sources astrophysiques à des fréquences inférieures à 1 Hz. Le seul moyen de mesurer les ondes gravitationnelles de faibles fréquences est de construire un détecteur dans l'environnement calme de l'espace, très loin des sources de bruit terrestres.

Le projet **LISA** (Laser Interferometer Space Antenna) mené conjointement par la NASA et l'ESA devrait ouvrir la fenêtre de fréquences comprises entre  $10^{-4}$  et  $10^{-1}$  Hz. Son lancement est prévu aux alentours de 2013. Beaucoup de sources sont attendues dans cette bande de fréquences, notamment la coalescence des trous noirs géants présents au centre de la plupart des galaxies (Rees [117]), ou les binaires de naines blanches. Contrairement aux détecteurs terrestres, LISA verra ces événements avec une extraordinaire sensibilité, avec typiquement un rapport signal sur bruit de 1000 ou plus. Le problème pour le traitement du signal sera donc d'isoler une source parmi les nombreuses sources détectées.

LISA est un interféromètre de Michelson, son principe est le même que celui des détecteurs interférométriques terrestres. LISA est composé de trois sondes, disposées selon un triangle équilatéral, orbitant à une unité astronomique du Soleil et environ 20 degrés derrière la Terre comme le montre la figure 2.10. La taille de chacun des bras est de  $5 \cdot 10^6$  km. À l'aide de ses trois bras, on peut reconstruire deux interféromètres distincts, si bien que l'on pourra mesurer la polarisation des ondes gravitationnelles directement.

## 2.4. DÉTECTION DES ONDES GRAVITATIONNELLES

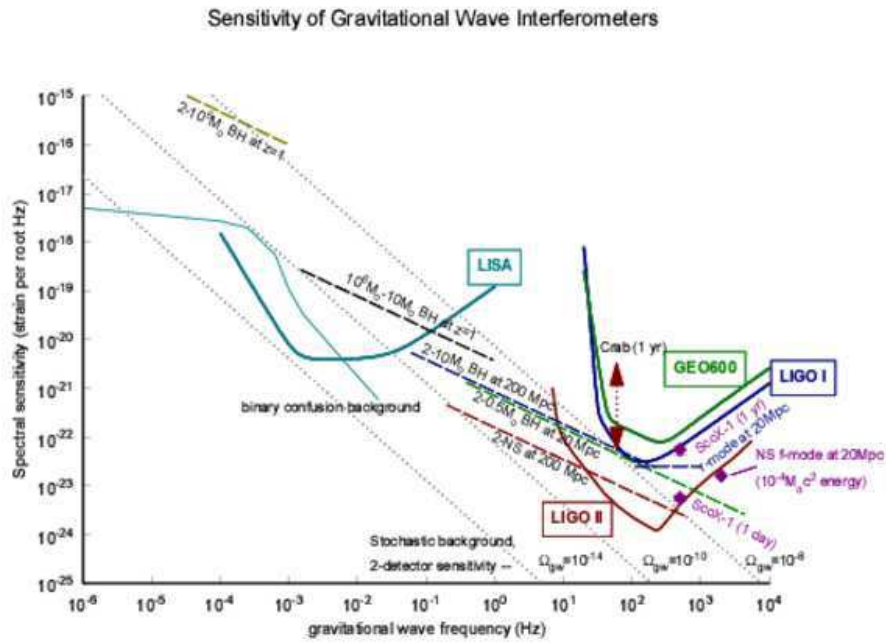


FIG. 2.9 – Sensibilité des détecteurs interférométriques LIGO I et LIGO II (première et seconde génération), GEO 600 et LISA comparée avec les amplitudes de quelques sources possibles. La sensibilité de l’interféromètre VIRGO se situe entre celle de LIGO I et LIGO II. D’après Lobo [97]

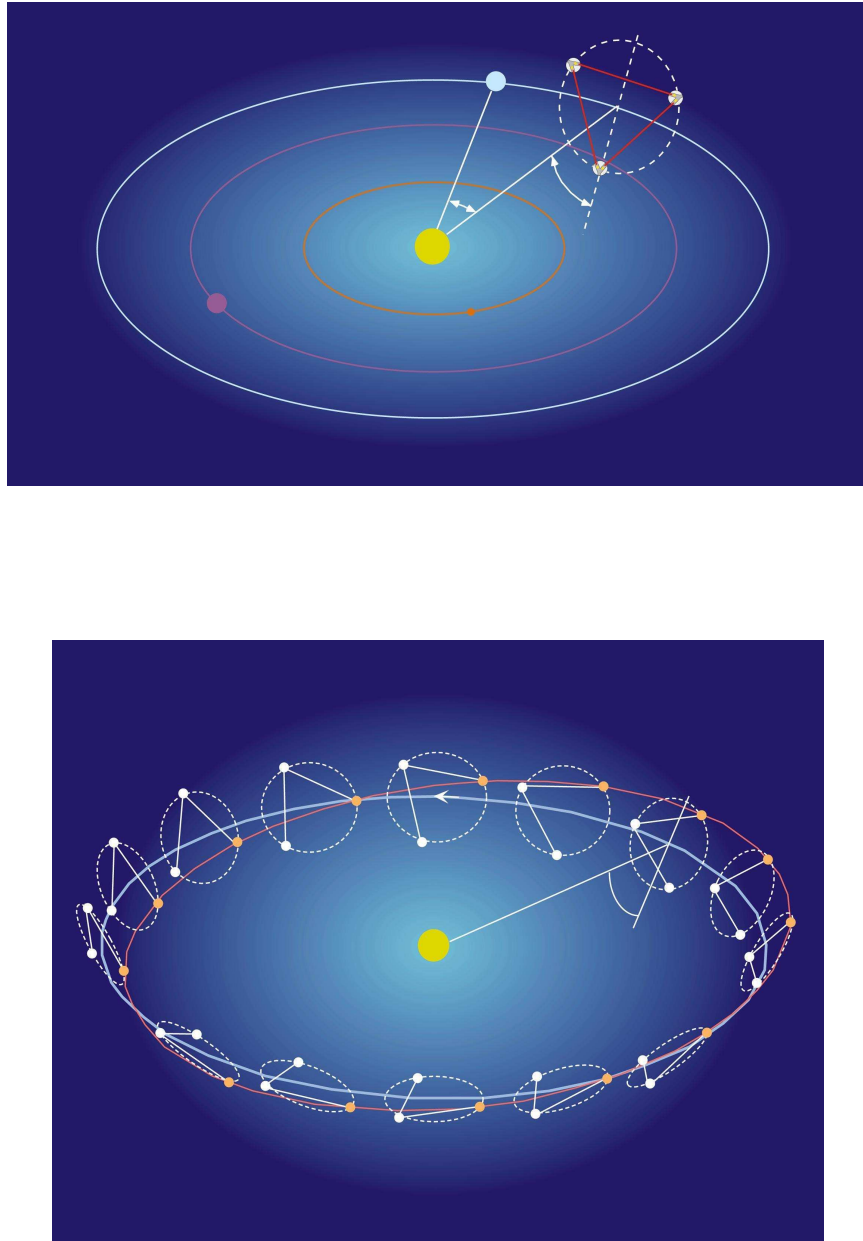


FIG. 2.10 – Schémas du projet d'interféromètre spatial LISA (Source <http://lisa.jpl.nasa.gov>)

# Chapitre 3

## Étoiles à neutrons

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction - Objets compacts</b>	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Historique</b>	<b>41</b>
<b>3.3</b>	<b>Structure d'une étoile à neutrons</b>	<b>41</b>
3.3.1	Équation d'état	41
3.3.2	Structure	42
<b>3.4</b>	<b>Paramètres physiques</b>	<b>44</b>
3.4.1	Masse - Rayon	44
3.4.2	Masse maximale	44
<b>3.5</b>	<b>Étoiles de quarks étranges</b>	<b>46</b>
3.5.1	Introduction	46
3.5.2	Modèle du sac MIT	48
3.5.3	Caractéristiques des étoiles étranges	51
3.5.4	Observations	52

---

### 3.1 Introduction - Objets compacts

Née de l'effondrement d'un nuage gazeux, une étoile produit son énergie grâce aux réactions nucléaires qui ont lieu en son centre. Tout d'abord elle brûle son hydrogène, et produit au fur et à mesure des éléments plus lourds. L'étoile est alors maintenue en équilibre par la pression thermique et la pression de radiation des photons issus de ces réactions nucléaires, s'opposant à la force gravitationnelle. Cette phase de la vie de l'étoile durera de quelques millions d'années pour les étoiles les plus lourdes à quelques dizaines de milliards d'années pour les plus légères.

Une fois tous les carburants épuisés, la force gravitationnelle l'emporte et l'étoile s'effondre sous l'effet de son propre poids. Quelle est alors la force capable de contrer la gravité, et de stopper l'effondrement, la densité augmentant progressivement ? Dans un premier temps, étant

### CHAPITRE 3. ÉTOILES À NEUTRONS

astre	contreponds de la gravitation	masse $M$ [ $M_\odot$ ]	rayon $R$ [km]	densité $\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	paramètre de relativité $\Xi$
Terre	forces électromag. (structure cristalline)	$3 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^3$	$5 \times 10^3$	$10^{-10}$
Soleil	pression thermique pression de radiation	1	$7 \times 10^5$	$10^3$	$10^{-6}$
naine blanche	press. de dégénéresc. des électrons (Pauli)	0.1 à 1.4	$\sim 10^4$	$\sim 10^{10}$	$10^{-4}$ à $10^{-3}$
étoile à neutrons	interaction forte entre les baryons	1 à $\sim 3$	$\sim 10$	$\sim 10^{18}$	$\sim 0.2$
trou noir stellaire	pas de contreponds	$> \sim 3$	$> \sim 9$	0	1
trou noir massif	pas de contreponds	$\sim 10^9$	20 UA	0	1

TAB. 3.1 – Caractéristiques moyennes de divers objets astrophysiques et leur paramètre de relativité  $\Xi \sim |E_{\text{grav}}|/Mc^2 \sim R_g/R$ . D’aprèsourgoulhon [70].

des fermions, les électrons vont devenir dégénérés, provoquant d’après le principe de Pauli, une nouvelle force de pression. Pour des étoiles de masses initiales inférieures à  $10M_\odot$  environ, cette force de pression sera assez intense pour s’opposer à la gravitation et une **naine blanche** se forme. Cependant la masse du coeur de ces objets ne peut excéder une valeur critique dite masse de Chandrasekhar ( $\sim 1.4M_\odot$ ). Au dessus de cette masse, l’effondrement se poursuit jusqu’à ce que la densité centrale atteigne la densité de saturation de la matière nucléaire ( $\sim 2.6 \times 10^{14} \text{g.cm}^{-3}$ ). Cette densité correspond à une distance entre les particules qui minimise l’énergie par nucléon. Si la matière est comprimée au delà de cette densité, l’interaction forte devient alors répulsive. Il peut se former un nouvel état d’équilibre, c’est la formation d’une **étoile à neutrons**. Encore une fois, le coeur de ces étoiles a une masse limite, appelée masse d’Oppenheimer-Volkov et valant environ 2-3 masses solaires [112]. Au delà de cette masse, l’interaction forte ne parvient pas à stopper l’effondrement, qui continue indéfiniment jusqu’à la formation d’un **trou noir**.

Pour classifier les trois types d’objets compacts que nous venons de mentionner, on définit une quantité sans dimension, le paramètre de relativité ou aussi de compacité d’un objet

$$\Xi := \frac{GM}{Rc^2}, \quad (3.1)$$

où  $M$  et  $R$  sont respectivement la masse et le rayon de l’objet considéré. En ordre de grandeur, on obtient

$$\Xi \sim \frac{|E_{\text{grav}}|}{Mc^2} \sim \frac{R_g}{R}, \quad (3.2)$$

où  $E_{\text{grav}}$  est l’énergie potentielle gravitationnelle,  $Mc^2$  est l’énergie de masse et  $R_g = 2GM/c^2$  est le rayon gravitationnel ou encore rayon de Schwarzschild.  $\Xi$  mesure l’écart du rayon d’un

objet par rapport au rayon d'un trou noir de même masse. Pour un trou noir, on aura par définition  $\Xi = 1$ . Les valeurs typiques de la masse, du rayon, de la densité et du paramètre de relativité  $\Xi$  sont répertoriées dans le tableau 3.1.

## 3.2 Historique

Le soir même de l'annonce de la découverte du neutron par J. Chadwick en 1932, Landau aurait émis l'idée que des étoiles denses principalement constituées de neutrons pourraient exister. En 1934, les astronomes W. Baade et F. Zwicky, ont émis la remarquable prédiction que les étoiles à neutrons se forment par l'explosion d'une supernovae. Les étoiles à neutrons auraient une très grande densité et petit rayon, ce qui leur donneraient un intense champ gravitationnel.

Les premiers calculs de modèles d'étoiles à neutrons tenant compte de la relativité générale furent effectués en 1939 par J.R. Oppenheimer et G. Volkov. Ils supposent que la matière est constituée de neutrons formant un gaz de Fermi dégénéré. Durant les trente années qui suivirent, les étoiles à neutrons ont été largement oubliées par les astronomes, trop difficiles à observer avec des télescopes optiques à cause de leur petite taille et leur faible radiation thermique. Ce n'est qu'en 1967 que A. Hewish et son étudiante J. Bell observent à l'aide de leur radiotélescope le premier pulsar, PSR B1919+21. En quelques mois, diverses autres pulsars furent observés. Très rapidement, en 1968, T. Gold identifie les pulsars à des étoiles à neutrons en rotation possédant un intense champ magnétique dont l'axe n'est pas aligné avec l'axe de rotation. Les pulsars ont des périodes pouvant aller de la seconde à la milliseconde, le premier pulsar milliseconde PSR 1937+21 de période  $P = 1.56$  ms ayant été découvert en 1982.

Le premier pulsar binaire est découvert en 1974 par R.A. Hulse et J.H. Taylor, PSR 1913+16. Il permit de démontrer l'existence des ondes gravitationnelles, ce qui leur a valu le prix Nobel en 1993 [86].

## 3.3 Structure d'une étoile à neutrons

### 3.3.1 Équation d'état

Afin d'obtenir un modèle d'étoile à neutrons, il est nécessaire de connaître l'équation d'état de la matière dense. En effet, pour un modèle à symétrie sphérique, par exemple, on doit résoudre le système d'équations de Tolman-Oppenheimer-Volkov. C'est un système composé de trois équations, pour la masse  $m$ , la pression  $p$  et un potentiel métrique  $\Phi$  et dépendant de cinq variables : la masse, la pression, le potentiel métrique, la densité d'énergie du fluide  $\rho$  et la densité baryonique  $n$ . Afin de fermer le système, il est nécessaire de spécifier deux relations entre  $p$ ,  $\rho$  et  $n$ , c'est à dire une **équation d'état**.

Un certain temps après leur formation, les étoiles à neutrons se sont refroidies, de telle sorte que l'approximation de température nulle est excellente, et atteignent un état d'équilibre thermique et chimique. Il s'agit de l'hypothèse de matière froide catalysée. Dans ces conditions, on peut montrer que toutes les grandeurs physiques macroscopiques sont des fonctions d'un seul



paramètre scalaire, souvent choisi comme étant la densité baryonique  $n$ . L'équation d'état de l'étoile, dite barotrope, est donc

$$\rho = \rho(n) \quad \text{et} \quad p = p(n). \quad (3.3)$$

Ces équations effectives sont à priori suffisantes pour des calculs de configuration d'étoiles à neutrons en équilibre. Une quantité importante, que l'on utilisera souvent par la suite est l'indice adiabatique  $\gamma$  du fluide

$$\gamma(n) = \frac{n}{p} \frac{dp}{dn} \quad (3.4)$$

qui mesure la “dureté” de l'équation d'état. Dans la majorité des calculs de la phase spirale et la coalescence d'étoiles à neutrons binaires, on suppose une équation d'état dite polytropique

$$p = \kappa n^\gamma \quad (3.5)$$

où  $\kappa$  est une constante qui représente la compressibilité de la matière. En général,  $\gamma$  sera compris entre 2 et 3. Mais, cette équation d'état est très simplifiée et ne correspond pas forcément à une situation réaliste. En effet, l'état de la matière à des densités nucléaires,  $n_{nuc} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ ,  $\rho_{nuc} = 2.6 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ , pour de grandes asymétries protons/neutrons est très mal connue. Et c'est pourtant des densités égales voire supérieures que l'on retrouve dans le coeur des étoiles à neutrons.

La principale difficulté théorique provient du fait que l'étoile est dominée par les interactions nucléaires fortes entre les nucléons et doit donc être décrite par la chromodynamique quantique (QCD, pour Quantum ChromoDynamics), une théorie extrêmement complexe. Dans le coeur de l'étoile, la matière est fortement enrichie en neutrons, avec un rapport  $N/Z \sim 10$ ,  $N$  et  $Z$  étant respectivement le nombre de neutrons et de protons. Or les théories de la matière nucléaire sont ajustées sur les propriétés des noyaux lourds où le nombre de protons et de neutrons sont similaires. Le type de milieu que l'on retrouve dans ces étoiles n'a pas son équivalent sur Terre, et il est même impossible de produire de la matière ultra-dense avec des paramètres physiques équivalents dans les accélérateurs actuels.

De plus, pour une densité supérieure à deux ou trois fois la densité nucléaire, la composition elle-même de la matière est encore très mal connue (Fig. 3.1) : il pourrait s'agir d'une matière baryonique riche en hypérons, de condensats de Bose-Einstein de pions ou de kaons, d'un plasma de quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  déconfinés (voir [78] pour une revue). Il est également possible que l'état fondamental de la matière à des densités beaucoup moins importantes que la densité nucléaire soit constitué de quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$ . Lors de la formation d'une étoile à neutrons, la matière pourrait alors subir une transition de phase vers cet état de basse énergie, donnant naissance aux **étoiles étranges** (quartier en bas à gauche de la figure 3.1). Ces étoiles sont l'objet de la section 3.5.

### 3.3.2 Structure

Une étoile à neutrons possède une structure en couches, avec une densité croissante depuis la surface vers le centre. On compte principalement quatre régions très différentes : la surface, l'écorce solide, le manteau et enfin le coeur.

### 3.3. STRUCTURE D'UNE ÉTOILE À NEUTRONS

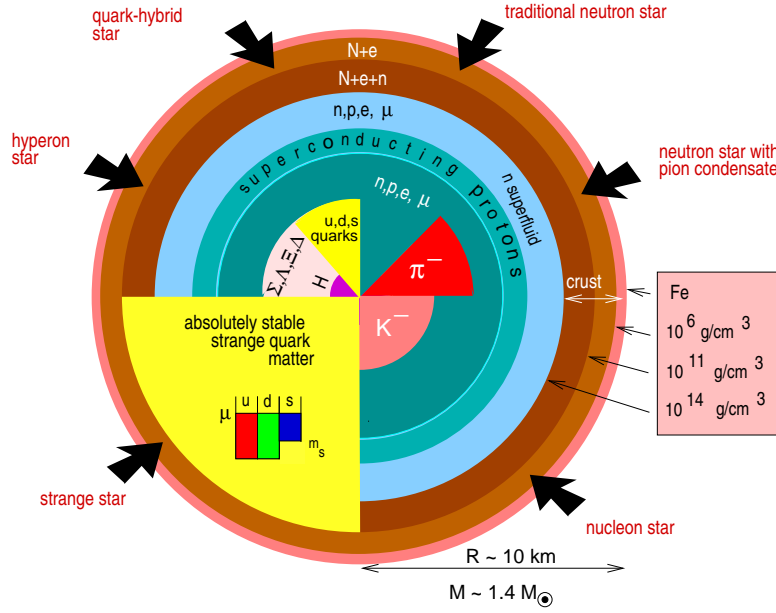


FIG. 3.1 – Modèles concurrents, prédits par la théorie, de l'intérieur d'une étoile à neutrons (d'après Weber [145]).

- *la magnétosphère* est un plasma de densité variable dépendant de la valeur du champ magnétique de l'étoile. Typiquement une étoile à neutrons possède un champ magnétique extrêmement intense de l'ordre de  $10^8$  Teslas (pour comparaison, le champ magnétique que l'on peut produire en laboratoire ne dépasse pas les 100 Teslas). La magnétosphère est responsable de l'émission d'ondes électromagnétiques pulsées, dues au rayonnement synchrotron de particules relativistes se déplaçant le long des lignes de champs magnétique, proches de l'axe magnétique. C'est le phénomène associé aux pulsars comme l'ont montré Goldreich & Julian [63].
- *la surface* ( $\rho < 10^6 \text{ g.cm}^{-3}$ ), d'une épaisseur inférieure à cent mètres, pourrait par exemple être constituée d'un océan de métal liquide. C'est une région où l'équation d'état est très dépendante de la valeur du champ magnétique et de la température.
- *l'écorce externe* ( $10^6 \text{ g.cm}^{-3} < \rho < \rho_{drip} = 4.3 \times 10^{11} \text{ g.cm}^{-3}$ ), de quelques centaines de mètres d'épaisseur, est constituée d'un cristal coulombien de noyaux lourds, en équilibre avec un gaz d'électrons relativistes. A mesure que la densité augmente, les noyaux deviennent de plus en plus lourds, capturent de plus en plus d'électrons et sont donc de plus en plus enrichis en neutrons. La densité  $\rho_{drip}$  dite de "neutron drip" est une densité critique à partir de laquelle les neutrons deviennent libres et un gaz de neutrons commence à apparaître.

- *l'écorce interne* ( $4.3 \times 10^{11} \text{g.cm}^{-3} < \rho < 2. \times 10^{14} \text{g.cm}^{-3}$ ) d'une épaisseur de un kilomètre environ, est constituée de noyaux très enrichis en neutrons, d'électrons dégénérés et relativistes et d'un gaz de neutrons superfluides. Ce type de phase n'existe pas sur Terre, le neutron étant instable à pression nulle.
- *le manteau* ( $2.6 \times 10^{14} \text{g.cm}^{-3} < \rho \lesssim 5 \times 10^{14} \text{g.cm}^{-3}$ ), d'une épaisseur de plusieurs kilomètres, est composé principalement de neutrons superfluides et dans une moindre mesure ( $\sim 10\%$ ) de protons et d'électrons. Des muons peuvent également apparaître si le potentiel chimique des électrons est supérieur à l'énergie de masse des muons.
- *le coeur* ( $\rho \gtrsim 5 \times 10^{14} \text{g.cm}^{-3}$ ), d'une épaisseur de quelques kilomètres également, où la matière aurait subi une transition de phase. Il a une composition très variable selon la densité centrale de l'étoile et selon les modèles, comme souligné plus haut et comme le montre la figure 3.1. Le manteau et le coeur contiennent l'essentiel de la masse, plus de 99 %. Notons que dans l'hypothèse des étoiles étranges, le manteau et l'écorce interne n'existent pas, seul un coeur de quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  déconfinés serait présent (avec une enveloppe externe éventuellement).

## 3.4 Paramètres physiques

### 3.4.1 Masse - Rayon

La figure 3.2 représente la masse gravitationnelle d'une étoile à neutrons pour quatre équations d'état différentes pour la matière nucléaire (voir [13] pour des détails sur les équations d'états choisies), en fonction du rayon et de la densité centrale des objets. Pour chaque modèle, si on augmente la masse d'une étoile à neutrons, son rayon devient plus petit et la densité centrale augmente. Cela peut se comprendre simplement : sachant que les étoiles à neutrons sont liées par la gravitation, qui s'oppose aux forces répulsives, plus la masse de l'étoile est grande, plus la force gravitationnelle devient importante et plus l'étoile est comprimée. On note aussi l'existence d'une configuration limite, d'où une masse maximum, au delà de laquelle l'étoile n'est plus stable. Plus la masse s'approche de cette masse maximum, plus la compacité  $\Xi = GM/Rc^2$  devient importante. Pour une étoile de 0.1 masse solaire, la masse minimum d'une étoile à neutrons, on aura typiquement un rayon  $\sim 200$  km et une densité relativement faible. Par contre, une étoile plus classique de  $1.5 M_{\odot}$  aura un rayon de l'ordre de 10 km et une densité dépassant la densité nucléaire.

### 3.4.2 Masse maximale

Une possibilité pour identifier un trou noir est de pouvoir prétendre sans ambiguïté que la masse de l'objet observé est plus grande que la masse maximum permise pour une étoile à neutrons. L'existence d'une masse maximum a été montrée pour la première fois en 1939 par Oppenheimer & Volkov [112]. Mais la masse maximum  $M_{\text{max}}$  d'une étoile à neutrons est fortement dépendante de l'équation d'état pour la matière nucléaire. Plus l'équation d'état est dure,

### 3.4. PARAMÈTRES PHYSIQUES

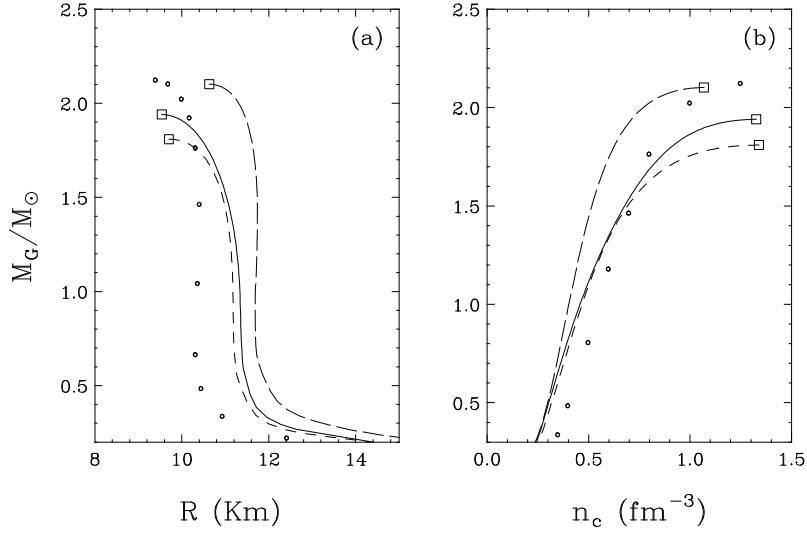


FIG. 3.2 – Masse gravitationnelle  $M_G$ , en unités de masse solaire  $M_\odot$ , en fonction du rayon  $R$  (fig. a) et de la densité centrale  $n_c$  (fig. b), pour quatre équations d'états différentes. Les carrés représentent les valeurs de la configuration limite. D'après Baldo *et al.* [13].

c'est à dire plus l'indice adiabatique est grand, et plus  $M_{\max}$  est grand. La figure 3.3 représente la masse gravitationnelle en fonction de la densité centrale obtenue en intégrant le système de Tolmann-Oppenheimer-Volkov pour différentes équations d'états. On voit que pour chaque équation d'état, il existe une densité maximum. Au delà de cette densité, les équilibres hydrostatiques deviennent instables. On peut résumer pour toutes ces équations d'états :

$$1.6M_\odot \leq M_{\max} \leq 3.1M_\odot. \quad (3.6)$$

En fait il est possible d'être plus général, on peut montrer qu'il existe une masse maximum pour une étoile à neutrons qui ne dépend pas de l'équation d'état. En partant de l'inégalité

$$0 \leq \frac{dp}{d\rho} < c^2, \quad (3.7)$$

où l'inégalité de droite exprime le fait que la vitesse du son ne peut pas dépasser celle de la lumière, on peut prédire que la masse limite se trouve dans l'intervalle  $\sim 3 - 5M_\odot$ , suivant les approximations choisies [81, 118].

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'étoile était sphérique et statique. Mais bien entendu ce n'est pas vrai en général, nous connaissons des pulsars millisecondes qui sont très loin de la symétrie sphérique. Intuitivement, la rotation devrait augmenter la masse maximum des étoiles à neutrons, les forces centrifuges venant s'ajouter à la pression pour s'opposer à la gravitation. En se plaçant à la vitesse de rotation maximum, la vitesse de rotation képlerienne, on peut montrer que l'augmentation de la masse due à la rotation est de l'ordre de 20 % [119].

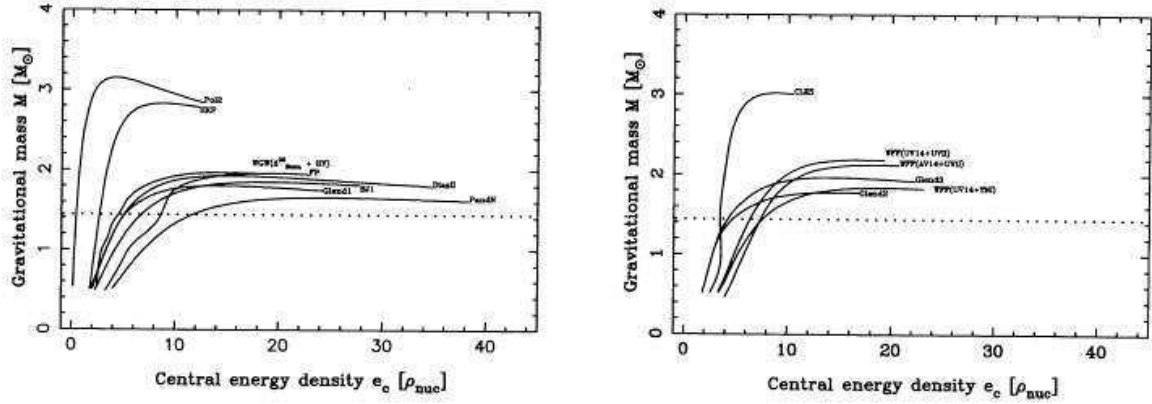


FIG. 3.3 – Masse gravitationnelle en fonction de la densité d'énergie centrale pour différentes équations d'état. La ligne en pointillés correspond à la masse du pulsar binaire PSR 1913+16 (d'après Salgado *et al.* [119])

Les observations ne permettent pas pour l'instant de discriminer entre telle ou telle équation d'état pour la matière dense. En effet, toutes les valeurs des masses mesurées pour les pulsars binaires et tous les pulsars X sont compatibles avec une masse maximum de  $1.6 M_{\odot}$ , et donc compatibles avec toutes les équations d'état précédentes. Pour pouvoir discriminer entre toutes ces équations d'état, il faudrait pouvoir mesurer un paramètre supplémentaire, autre que la masse, dépendant de l'équation d'état. On verra dans la suite de la thèse et notamment dans les chapitres sur les étoiles de quarks étranges que cela pourra être possible grâce à l'observation des ondes gravitationnelles émises par un système binaire.

## 3.5 Étoiles de quarks étranges

### 3.5.1 Introduction

La possibilité de l'existence de la matière de quarks étranges remonte aux années soixante dix. R. Bodmer a émis l'idée en 1971 que l'état fondamental de la matière nucléaire pourrait être un état de quarks déconfinés [24]. En 1984, E. Witten reformula indépendamment cette idée et considéra la possibilité que les étoiles à neutrons pouvaient être en fait des étoiles de quarks étranges, c'est à dire composées des quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  déconfinés. Une illustration de cette hypothèse de matière étrange est donnée figure 3.4, qui compare l'énergie par baryon du  $^{56}\text{Fe}$  avec celle de la matière composée de deux ou trois saveurs de quarks. L'énergie pour trois saveurs de quarks est toujours plus faible que pour deux saveurs à cause du principe d'exclusion de Pauli. Des arguments théoriques montrent même que l'énergie avec trois saveurs de quarks peut être plus petite que 930.4 MeV (l'énergie par baryon du  $^{56}\text{Fe}$ ), la matière de quarks étranges pourrait donc être plus stable que les noyaux atomiques.

Cependant, même si la matière de quarks étranges est l'état fondamental, il n'est pas évident

### 3.5. ÉTOILES DE QUARKS ÉTRANGES

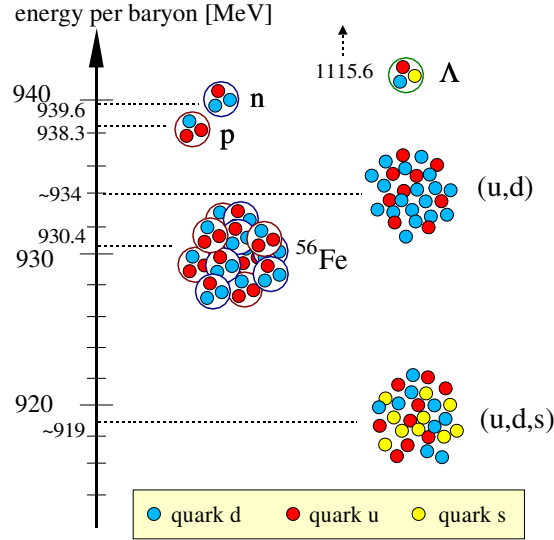


FIG. 3.4 – Comparaison de l'énergie par baryon du  $^{56}\text{Fe}$  et de la matière nucléaire composée de deux saveurs de quarks ( $u$  et  $d$ ) déconfinés ou de trois saveurs ( $u$ ,  $d$  et  $s$ ).

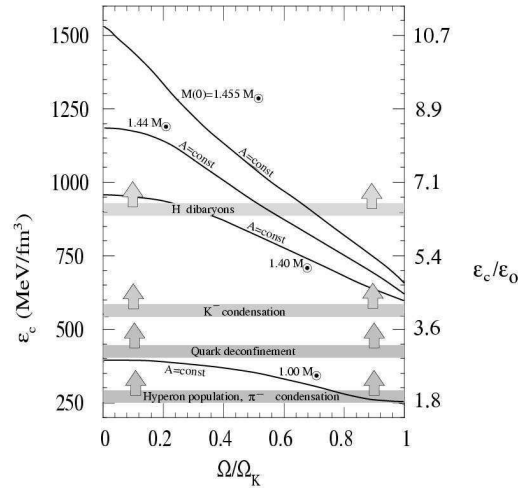


FIG. 3.5 – Densité centrale  $\epsilon_c$  en fonction de la fréquence de rotation pour quelques étoiles à neutrons et selon une équation d'état donnée. Le nombre de baryons des étoiles  $A$  est constant dans chaque cas. La densité devient si importante que selon la théorie, de nouvelles phases de la matière superdense peuvent apparaître.  $\epsilon_0 = 140 \text{ MeV}/\text{fm}^3$  est la densité de la matière nucléaire, et  $\Omega_k$  est la vitesse de rotation képlérienne.  $M(0)$  est la masse des étoiles à rotation nulle (d'après Weber [144]).

que cette transition de phase vers des quarks déconfinés puisse se produire. En fait, cela pourrait avoir lieu aux densités extrêmes que l'on atteint dans les étoiles à neutrons. Mais jusqu'à présent, on ne sait pas, à partir des expériences, à quelle densité cela se produit et aucune conclusion non plus n'est encore parvenue des simulations de QCD. Mais, à partir de considérations géométriques simples, les nucléons commencent à se toucher à une densité  $\sim (4\pi r_N^3/3)^{-1} \simeq 0.24 \text{ fm}^{-3}$ , avec un rayon caractéristique  $r_N \sim 1 \text{ fm}$  des nucléons, ce qui correspond à un peu moins de deux fois la densité baryonique de la matière nucléaire ordinaire. Au delà de cette densité, il est donc possible que les "surfaces" des nucléons se dissolvent et que les quarks originellement confinés commencent à peupler des états libres en dehors des nucléons. Dans le coeur des étoiles à neutrons, des densités de deux à trois fois la densité nucléaire peuvent largement être dépassées, dépendant de la fréquence de rotation et de la masse de l'étoile, comme l'indique la figure 3.5. Du fait de la faible masse du quark étrange, on s'attend à ce que les quarks up et down très énergétiques ainsi formés se transforment en quarks étranges à cette densité. Les réactions électrofaibles suivantes assurent alors un équilibre chimique entre les différents quarks

$$d \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}^e, \quad s \leftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}^e, \quad s + u \leftrightarrow d + u. \quad (3.8)$$

Si cette hypothèse de matière étrange est vraie, les étoiles constituées des quarks  $u$ ,  $d$  et  $s$  déconfinés, appelées étoiles de quarks étranges ou plus simplement étoiles étranges, devraient exister. A l'inverse des étoiles à neutrons classiques qui sont liées par l'attraction gravitationnelle, ces étoiles sont auto-liées, c'est à dire qu'elles seraient stables même en l'absence de gravitation, grâce aux interactions nucléaires fortes entre les quarks déconfinés.

### 3.5.2 Modèle du sac MIT

Afin de déterminer l'équation d'état de la matière de quarks déconfinés, des efforts considérables sont fait pour résoudre les équations du mouvement de la QCD sur réseau. Cependant, de telles simulations ne fournissent pas encore de résultats significatifs pour une densité baryonique finie, et il est donc nécessaire de faire appel à des modèles de QCD non-perturbative, pour la matière de quarks, qui incorporent les propriétés de base de la QCD. Parmi ces modèles, le plus utilisé est le **modèle phénoménologique du sac MIT** (Massachusetts Institute of Technology), où les masses des quarks sont fixées et le confinement est décrit par une constante de sac  $B$ .

Dans ce modèle, et comme l'illustre la figure 3.6, la pression  $P_i$  des quarks individuels contenus dans le sac est contrebalancée par la pression externe totale  $P_{ext} + B$  selon

$$P_{ext} + B = \sum_{\text{saveurs } i} P_i, \quad (3.9)$$

et la densité d'énergie totale du sac est

$$\epsilon = \sum_{\text{saveurs } i} \epsilon_i + B. \quad (3.10)$$

### 3.5. ÉTOILES DE QUARKS ÉTRANGES

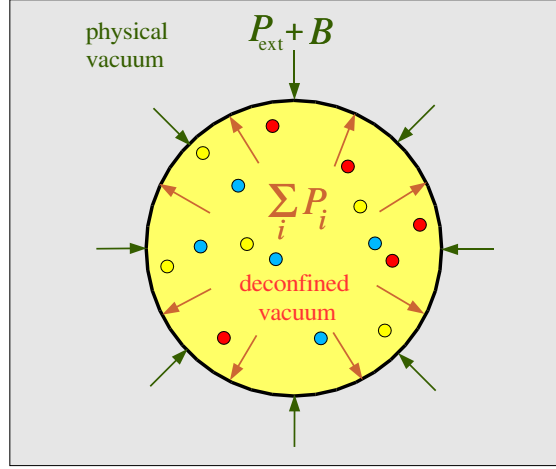


FIG. 3.6 – Modèle du sac MIT. L'équilibre est atteint par l'égalité entre la pression totale des quarks déconfinés et l'addition de la pression extérieure et la constante de sac  $B$ .

On peut montrer très simplement à partir de ce modèle du sac MIT que l'énergie par baryon pour trois saveurs de quarks est plus basse que pour deux saveurs de quarks uniquement. Le modèle du sac possède trois paramètres : la constante du sac  $B$  qui représente le confinement, la masse du quark étrange  $m_s$  (égale à environ 150 MeV) et la constante de couplage  $\alpha_s$  de l'interaction forte.

Pour simplifier, négligeons la masse du quark étrange ainsi que les interactions entre les quarks ( $m_s = \alpha_s = 0$ ). Une valeur typique de la constante de sac  $B \sim 60 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3} := B_{60}$ . Chaque saveur de quarks se comporte comme un gaz libre de Fermi ultra-relativiste. La pression  $P_i$  est donnée par :

$$P_i = \frac{\pi^{2/3}}{4} \hbar c n_i^{4/3} = \frac{1}{3} \epsilon_i, \quad (3.11)$$

avec  $n_i$  la densité des quarks  $i$ . La densité baryonique est donc  $n_B = \sum_{\text{saveurs } i} n_i/3$ .

En présence de seulement deux saveurs de quarks, la condition de neutralité électrique donne  $n_d = 2n_u$  d'où  $n_B = (n_d + n_u)/3 = n_u$ . A pression nulle ( $P_{\text{ext}} = 0$ ), on obtient d'après les équations (3.9) et (3.11) :  $B = \pi^{2/3}/4 \hbar c (1 + 2^{4/3}) n_u^{4/3}$  et  $\epsilon := \epsilon_0 = 4B$  d'où une énergie par baryon

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{(u,d)} = \frac{\epsilon_0}{n_B} = (4\pi^2)^{1/4} (1 + 2^{4/3})^{3/4} (\hbar c)^{3/4} B^{1/4} \quad (3.12)$$

$$\text{soit } \left. \frac{E}{A} \right|_{(u,d)} = 943.6 B_{60}^{1/4} \text{ MeV}. \quad (3.13)$$

Pour trois saveurs de quarks, la condition de neutralité électrique donne  $n_B = (n_d + n_u +$



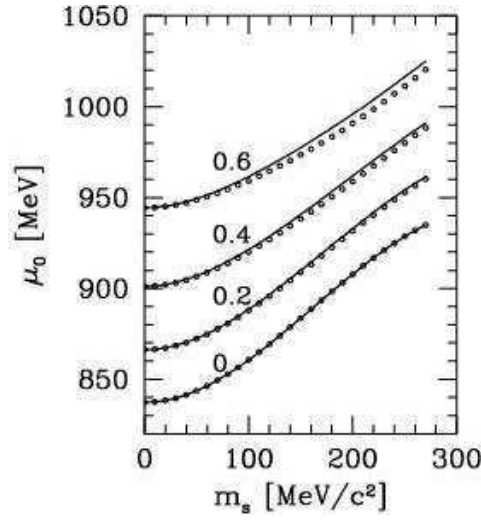


FIG. 3.7 – Variation de l'énergie par baryon  $E/A = \mu_0$  en fonction de la masse du quark étrange  $m_s$  et de l'intensité de la constante de couplage  $\alpha$  de la QCD. D'après Zdunik [160] pour  $B = 60 \text{ MeV.fm}^{-3}$ .

$n_s)/3 = n_u$  et de la même façon, l'énergie par baryon est

$$\left. \frac{E}{A} \right|_{(u,d,s)} = 837.3 B_{60}^{1/4} \text{ MeV}. \quad (3.14)$$

On retrouve donc le fait que, en raison du principe d'exclusion de Pauli, l'énergie par baryon est inférieure en présence de trois saveurs de quarks plutôt que deux. Si l'on impose que l'énergie par baryon du  $^{56}\text{Fe}$  ( $= 930.4 \text{ MeV}$ ) soit plus petite que pour le mélange de deux saveurs de quarks  $u$  et  $d$ , cela contraint la constante du sac  $B > 58.9 \text{ MeV.fm}^{-3}$ . Si de plus l'on souhaite que la matière de quarks étranges soit l'état fondamental de la matière nucléaire, c'est à dire qu'elle ait une énergie par baryon inférieure au  $^{56}\text{Fe}$ , on obtient une nouvelle inégalité  $B < 91.5 \text{ MeV.fm}^{-3}$ . Pour résumer, dans ce modèle du sac MIT simplifié, pour des quarks sans masse et sans interaction entre eux, la constante du sac doit satisfaire

$$58.9 \text{ MeV.fm}^{-3} < B < 91.5 \text{ MeV.fm}^{-3}. \quad (3.15)$$

Zdunik [160] a calculé numériquement l'énergie par baryon en incluant les deux autres paramètres du modèle du sac MIT, la masse du quark étrange  $m_s$  et l'intensité de la constante de couplage de la QCD  $\alpha$ . Les résultats sont représentés sur la figure 3.7 qui montre que l'énergie par baryon est une fonction croissante de  $m_s$  et  $\alpha$ , à  $B = 60 \text{ MeV.fm}^{-3}$  fixé. Le modèle simplifié avec des quarks sans masse et sans interaction surestime donc la valeur maximum de  $B$ .

Dans la suite de cette thèse, nous utiliserons le modèle du sac MIT avec différents jeux de paramètres pour décrire les étoiles étranges. Cependant, nous avons également effectué des calculs avec une équation d'état plus réaliste, issue de calculs de microphysique, l'équation de Dey *et al.* [53]. Il s'agit d'un modèle "dynamique" prenant en compte les interactions entre

### 3.5. ÉTOILES DE QUARKS ÉTRANGES

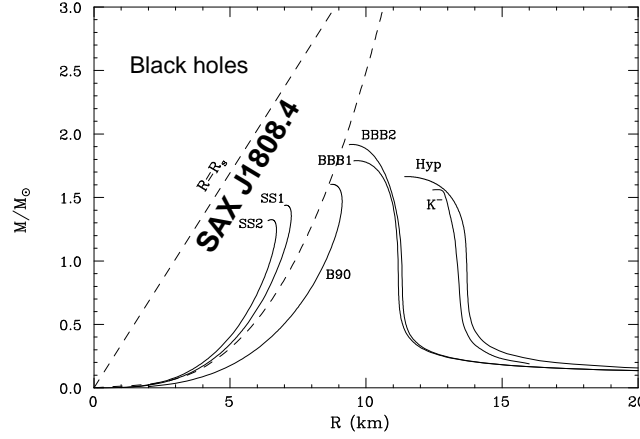


FIG. 3.8 – Masse gravitationnelle en fonction du rayon pour des étoiles à neutrons sans rotation (BBB1, BBB2, Hyp. et  $K^-$ ) et pour des étoiles étranges sans rotation décrites par le modèle du sac MIT (B90) et dans le modèle de Dey *et al.* (SS1 et SS2). Les valeurs pour SAX J1808.4-3658 (voir tableau 3.2) se situent entre les lignes en pointillés. La ligne pointillée  $R = R_s (= 2MR)$  indique la limite de Schwarzschild. D’après Li *et al.* [94].

les quarks à l’aide d’un potentiel vecteur provenant de l’échange de gluons. Pour toutes ces équations d’état, il est possible de montrer qu’avec une bonne approximation on peut écrire (voir [160] pour le modèle du sac MIT et [64] pour l’équation de Dey *et al.*)

$$P(\rho) = a(\rho - \rho_0) \quad (3.16)$$

avec  $\rho_0$  la densité d’énergie à la surface et  $a$  une constante,  $a$  et  $\rho_0$  dépendants des paramètres des modèles ( $B$ ,  $m_s$  et  $\alpha$  pour le modèle du sac MIT).

#### 3.5.3 Caractéristiques des étoiles étranges

Les étoiles étranges sont des objets auto-liés à pression extérieure nulle, qui existeraient même en l’absence de gravitation. Cela en fait des objets encore plus compacts que les étoiles à neutrons. Le rayon d’une étoile étrange est donc plus petit que celui d’une étoile à neutrons de même masse, seulement liée par la force gravitationnelle. La figure 3.8 compare la relation entre la masse et le rayon de ces objets compacts pour différentes équations d’états d’étoiles à neutrons et d’étoiles étranges (en l’absence d’écorce). Pour une étoile de  $1.4 M_\odot$ , la différence de rayon entre étoiles à neutrons et étoiles étranges est de l’ordre de 3-4 km et devient de plus en plus importante à mesure que la masse diminue.

Contrairement aux étoiles à neutrons, la relation masse-rayon pour une étoile étrange commence à l’origine et la masse est une fonction croissante du rayon (au moins pour des masses pas trop proches de la masse limite). Des masses et des rayons arbitrairement petits sont théoriquement possibles.

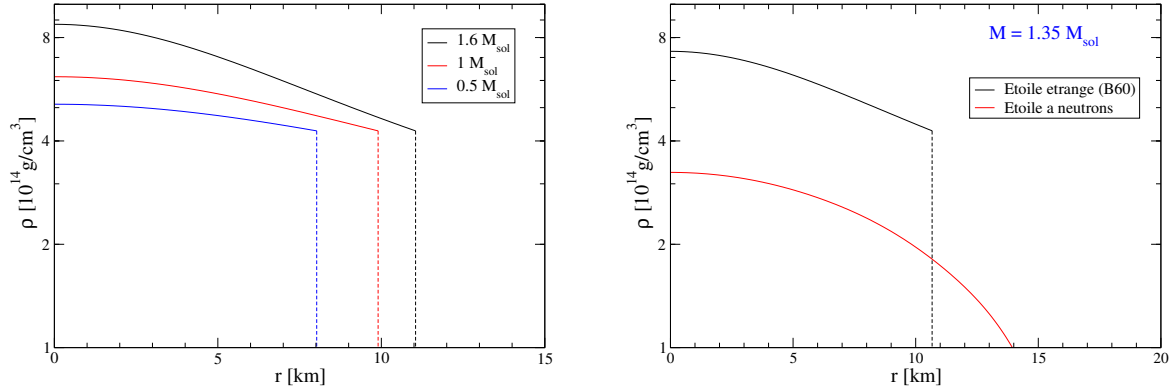


FIG. 3.9 – Profils de densités pour différentes masses d'étoiles étranges sans rotation et décrites par le modèle du sac MIT (figure de gauche) et comparaison entre étoiles à neutrons et étoiles étranges (figure de droite).

Les étoiles étranges présentent la particularité d'avoir une pression nulle à une densité finie. Le profil de densité de la figure 3.9 montre en effet qu'à la surface, à pression nulle, la densité est non nulle et qu'il s'agit même d'une densité nucléaire. Il existe donc une discontinuité de densité à la surface des étoiles étranges contrairement aux étoiles à neutrons qui présentent une densité nulle à leur surface.

On peut également noter que pour les étoiles de quarks étranges, le profil de densité s'aplatit à mesure que la masse diminue. Cette densité devient presque constante dans toute l'étoile, égale à  $\rho_0$ , la densité à la surface, pour des étoiles de faibles masses  $\sim 0.1 M_{\odot}$ . Pour ces étoiles légères, la masse est donc proportionnelle au volume, c'est à dire  $M \sim R^3$  où  $R$  est le rayon de l'étoile. Cela explique le comportement de la figure 3.8 près de l'origine.

### 3.5.4 Observations

Si les étoiles de quarks étranges existent, elles forment une branche distincte et déconnectée d'étoiles compactes, elles ne font pas partie du continuum de configurations d'équilibre qui inclut les naines blanches et les étoiles à neutrons. En principe, les étoiles à neutrons et les étoiles étranges pourraient coexister. Cependant, si la matière de quarks étranges est l'état fondamental de la matière, les étoiles à neutrons pourraient se convertir en étoiles étranges. Cela signifie que les objets que les astronomes nomment pulsars seraient des étoiles étranges en rotation et non des étoiles à neutrons en rotation. Quelques étoiles étranges candidates sont recensées dans le tableau 3.2.

Pour la source RX J1856.5-3754, le rayon a été déterminé grâce à l'émission thermique de la surface de l'objet compact, comparée à un spectre de corps noir. Si l'on en croit les dernières mesures de la distance de cet objet, de l'ordre de 175 pc, le rayon est évalué à 6 km. Les valeurs minimales du rayon des étoiles à neutrons sont difficilement inférieures à 8 km, alors qu'il n'existe pas de minimum pour les étoiles étranges. Cette annonce a fait beaucoup de bruit auprès de la NASA lors de la découverte en 2002, même si des conclusions sont encore

### 3.5. ÉTOILES DE QUARKS ÉTRANGES

prématurées. En effet, même si l'hypothèse qu'il s'agisse d'une étoile étrange est concevable, il est loin d'être exclu qu'il s'agisse d'une étoile à neutrons plus conventionnelle, en prenant en compte un modèle de corps noir à deux composantes par exemple.

Le pulsar J0205+6449 a récemment été identifié au reste de la supernova SN 1181, qui explosa en 1181. En utilisant les données de Chandra, Slane *et al.* [130] ont donné une valeur limite de la température de surface du pulsar de seulement  $T^\infty < 1.08 \times 10^6$  K, en dessous des prédictions des modèles standards de refroidissement des étoiles à neutrons. Ce qui en fit un autre candidat d'étoile de quarks étranges. Cependant, il a été montré depuis par Yakovlev *et al.* [155], par exemple, que l'existence de superfluidité au sein du coeur de l'étoile pouvait aussi être une explication.

En ce qui concerne le sursauteur X GRO J1744-28 découvert par le Compton Gamma-Ray Observatory (GRO), Cheng *et al.* [38] ont montré qu'il pourrait s'agir d'une étoile étrange avec un fort champ magnétique dipolaire de  $10^7$  Teslas. Quand la matière accrétée atteint une certaine masse critique, la croûte de l'étoile pourrait se casser provoquant la conversion de la masse accrétée en matière étrange, et un dégagement d'énergie. L'énergie du sursaut, sa durée ainsi que son spectre calculés à partir de ce modèle semblent être en accord avec les observations de GRO J1744-28.

Néanmoins, il ne s'agit encore ici que d'un modèle parmi d'autres et aucun objet n'a encore été clairement identifié comme étant une étoile étrange. Peut-être l'observation des ondes gravitationnelles émises par des systèmes binaires d'étoiles à neutrons permettra de tirer une conclusion.

TAB. 3.2 – Candidats possibles d'étoiles étranges

Objet compact	Caractéristique particulière	Références
RX J1856.5-3754	Petit rayon	[138]
4U 1728-34	Petit rayon	[25]
SAX J1808.4-3658	Petit rayon	[94]
Her X-1	Petit rayon	[53]
1E 1207.4-5209	Timing particulier	[153]
PSR 0943+10	"Micro orages"	[154]
3C58 (J0205+6449)	Faible température	[130]
GRO J1744-28	Caractéristiques Sursauts X	[38]



# Chapitre 4

## Trous noirs

### Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Historique de l'idée de trou noir</b>	<b>56</b>
<b>4.3</b>	<b>Trou noir de Schwarzschild</b>	<b>57</b>
4.3.1	La solution de Schwarzschild	57
4.3.2	Coordonnées de Kruskal-Szekeres	58
<b>4.4</b>	<b>Trou noir de Kerr</b>	<b>61</b>
4.4.1	Coordonnées de Boyer-Lindquist	61
4.4.2	Ergosphère	63
4.4.3	Extraction d'énergie à partir d'un trou noir	63
4.4.4	Lois de la thermodynamique des trous noirs	64
<b>4.5</b>	<b>Horizons - Horizons isolés</b>	<b>65</b>
4.5.1	Hypersurfaces nulles	65
4.5.2	Horizons des événements et horizons apparents	67
4.5.3	Horizons isolés	69

### 4.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les étoiles à neutrons et les naines blanches ont une masse limite supérieure. Qu'arrive t'il donc à une étoile à neutrons qui accrète de la matière et excède la masse limite ? Quel est le destin de l'effondrement du coeur d'une étoile massive si la masse du coeur est trop grande pour former une étoile à neutrons ? La réponse, selon la relativité générale, est que rien ne peut arrêter l'effondrement. Au fil de l'effondrement, le champ gravitationnel devient de plus en plus intense, et éventuellement rien ne peut s'échapper de l'objet, pas même la lumière. Un trou noir est ainsi né.

Le trou noir résultant de l'effondrement est caractérisé par la région de l'espace-temps causalement déconnecté du reste de l'Univers, c'est-à-dire qui ne peut pas communiquer avec le monde extérieur. La frontière de cette région, la surface du trou noir, est appelée *horizon des événements*.

## 4.2 Historique de l'idée de trou noir

Dès 1795, Laplace remarqua qu'une conséquence de la gravitation newtonienne et de la théorie corpusculaire de la lumière de Newton était que la lumière ne pouvait pas s'échapper d'un objet ayant une masse suffisamment grande et un rayon petit. En effet, la vitesse de libération d'un corps sphérique de masse  $M$  à une distance  $r$  atteint la vitesse de la lumière lorsque

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{GM}{r}. \quad (4.1)$$

Il existe donc une valeur critique  $R_g$  telle que pour  $r < R_g$ , le corpuscule de lumière est piégé par attraction gravitationnelle.  $R_g$  est simplement donné par

$$R_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.2)$$

et est appelé rayon gravitationnel. Un objet de masse  $M$  et de rayon  $R_g$  serait donc un trou noir. Pour les objets du système solaire, ce rayon est très petit,  $\sim 3$  km pour le Soleil et  $\sim 1$  cm pour la Terre. Cependant, on peut noter que les trous noirs ne correspondent pas nécessairement à des objets extrêmement denses. En effet, l'équation (4.1) est en  $M/R$  alors que la densité varie comme  $M/R^3$ . En introduisant la densité moyenne  $\rho$ , l'équation (4.1) donne  $c^2/2 = 4\pi G\rho r^2/3$ , de sorte que quelle que soit la valeur de  $\rho$ , il suffit que le corps soit suffisamment étendu pour vérifier le critère de trou noir. On peut ainsi calculer qu'un astre de même densité que le Soleil serait un trou noir s'il avait un rayon 500 fois plus grand.

Malgré cette prévision très ancienne de la possibilité d'existence des trous noirs, l'idée n'a trouvée que peu d'adeptes, même après la formulation de la relativité générale.

En décembre 1915, quelques mois après la publication des papiers sur la relativité générale d'Einstein, Karl Schwarzschild exhiba sa solution relativiste du champ gravitationnel créé par une masse sphérique. Mais, à l'époque, personne, pas même Schwarzschild ou Einstein, ne savait que cette solution décrivait complètement le champ extérieur d'un trou noir sphérique, neutre, et sans rotation.

Chandrasekhar découvrit en 1930 l'existence d'une masse limite supérieure pour une étoile complètement dégénérée. Ce qui devait impliquer que la formation d'un trou noir était le destin inévitable de l'évolution des étoiles massives. Mais même Eddington qui fût l'un des premiers à comprendre et apprécier la théorie de la relativité générale déclara en 1935 : "I felt driven to the conclusion that this was almost a reductio and absurdum of the relativistic degeneracy formula. I think that there should be a law of Nature to prevent the star from behaving in this absurd way". Eddington était loin d'être le seul à rejeter l'idée de l'existence d'une masse limite. Plutôt que d'admettre cette idée, Landau préférait penser que certaines régions de l'étoile devaient violer les lois de la mécanique quantique.

Et en 1939, Einstein écrivit dans un papier : "The essential result of this investigation is a clear understanding as to why the Schwarzschild singularities do not exist in physical reality". Ce qui montre clairement qu'Einstein lui-même rejetait l'idée de trous noirs que prédisaient ses lois de la relativité générale. Les trous noirs et le problème de l'effondrement gravitationnel ont été largement ignorés jusqu'aux années soixante.

En 1963, Kerr découvrit une famille exacte de solutions des équations d'Einstein dans le vide en l'absence de charges, qui fût généralisé en présence de charges par Newman *et al.* en 1965. C'est seulement un peu plus tard que la relation entre ces résultats et les trous noirs fût établie. Et on sait maintenant que la géométrie de Kerr-Newman décrit complètement et uniquement le champ gravitationnel extérieur d'un trou noir stationnaire. Un nombre important de propriétés des trous noirs et plusieurs théorèmes majeurs ont été découverts à cette époque.

## 4.3 Trou noir de Schwarzschild

### 4.3.1 La solution de Schwarzschild

L'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild a présenté en 1915 une solution exacte des équations d'Einstein dans le vide. Dans le système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$  de Schwarzschild, la métrique prend la forme suivante (dans les unités géométriques  $c = G = 1$ )

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.3)$$

où  $M$  est la masse du trou noir. On peut remarquer que la métrique devient progressivement minkowskienne à mesure que  $r \rightarrow \infty$ , l'espace est donc asymptotiquement plat.

Le fait que la métrique de Schwarzschild n'est pas qu'une solution mais l'unique solution du vide à symétrie sphérique est connu sous le nom de théorème de Birkhoff. Il est intéressant de voir que le résultat est une métrique statique, alors que rien n'est imposé pour la source mis à part qu'elle soit à symétrie sphérique. Cela pourrait par exemple décrire un effondrement d'étoile, tant que cet effondrement est symétrique.

A partir de (4.3), on peut remarquer que les coefficients de la métrique deviennent infinis en  $r = 2M$ , c'est-à-dire que dans ces coordonnées il existe une singularité en  $r = 2M$ . On peut voir que cette singularité est uniquement due à une pathologie du système de coordonnées. En effet, les quantités invariantes que l'on peut former à partir du tenseur de courbure sont régulières en  $r = 2M$ . Toutefois, on peut montrer que la surface définie par  $r = 2M$  correspond à l'horizon du trou noir.

Par contre la singularité que l'on observe en  $r = 0$  est bien une singularité de l'espace-temps, le tenseur de courbure divergeant en  $r = 0$ . Cette singularité change la topologie globale de l'espace-temps, ce qui explique pourquoi cette solution n'est pas identique à la solution de l'espace plat de Minkowski. Un trou noir est une solution du vide mais où la topologie est non-triviale.

Voyons maintenant la structure causale, définie par les cônes de lumière, de la métrique de Schwarzschild. On considère des géodésiques de genre lumières radiales, c'est-à-dire  $\theta$  et  $\varphi$  constants et  $ds^2 = 0$ . On obtient, à partir de (4.3)



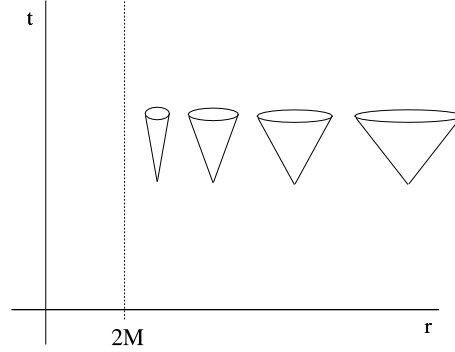


FIG. 4.1 – Cônes de lumière dans le plan  $t - r$  en coordonnées de Schwarzschild.

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (4.4)$$

Dans un diagramme d'espace-temps et dans le plan  $t - r$ , l'ouverture du cône de lumière tend vers  $\pm 1$  pour  $r$  grand comme cela doit être dans un espace plat. Au fur et à mesure qu'on approche l'horizon situé à  $r = 2M$ ,  $dt/dr \rightarrow \pm\infty$  et le cône de lumière se ferme comme le montre la figure 4.1. Ainsi, un rayon lumineux qui approche  $r = 2M$  semble ne jamais y parvenir, dans ce système de coordonnées. En fait, ce n'est qu'une illusion et le rayon lumineux n'aura aucun problème pour atteindre l'horizon. Cependant, un observateur à l'infini ne sera pas capable de le dire.

### 4.3.2 Coordonnées de Kruskal-Szekeres

Comme nous venons de le voir, un des problèmes des coordonnées de Schwarzschild est que  $dt/dr \rightarrow \pm\infty$  le long des géodésiques de genre lumière radiales lorsqu'on approche l'horizon. Remarquons qu'on peut résoudre l'équation (4.4) caractérisant les géodésiques de genre lumière pour obtenir

$$t = \pm r^* + \text{constante}, \quad (4.5)$$

où la coordonnée dite “tortue”  $r^*$  est définie par

$$r^* = r + 2M \ln \left( \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right). \quad (4.6)$$

Dans ces coordonnées, les cônes de lumière ne semblent plus se fermer, et aucun des coefficients de la métrique ne devient infini à  $r = 2M$ . Le prix à payer, néanmoins, est que la surface d'intérêt, l'horizon, a été rejetée à l'infini.

Le prochain pas consiste à définir des coordonnées naturellement adaptées aux géodésiques de genre lumière

$$\tilde{u} = t + r^* \quad \text{et} \quad \tilde{v} = t - r^*, \quad (4.7)$$

### 4.3. TROU NOIR DE SCHWARZSCHILD

de telle sorte que les géodésiques de genre lumière radiales entrantes sont caractérisées par  $\tilde{u} = \text{constante}$  et les géodésiques de genre lumière radiales sortantes par  $\tilde{v} = \text{constante}$  (à  $\theta$  et  $\varphi$  constantes). Maintenant, introduisons des coordonnées qui ramènent la surface  $r = 2M$  à une position coordonnée finie. Choisissons

$$u' = \exp(\tilde{u}/4M), \quad u' \in [0, \infty] \quad (4.8)$$

$$v' = \exp(-\tilde{v}/4M), \quad v' \in [0, \infty]. \quad (4.9)$$

Les coordonnées de Schwarzschild ne couvrent que le quart du plan  $(u', v')$ . On étend donc l'espace temps à tout le plan,  $u'$  et  $v'$  variant alors de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

Dans les coordonnées  $(u', v', \theta, \varphi)$ , la métrique de Schwarzschild devient

$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} du' dv' + r^2 d\Omega^2. \quad (4.10)$$

La nature non singulière en  $r = 2M$  devient manifeste, prouvant qu'il s'agissait bien d'une pathologie du système de coordonnées de Schwarzschild.

Enfin, remarquons que  $u'$  et  $v'$  sont deux coordonnées de genre lumière (les vecteurs naturels associés sont de genre lumière), si bien que la base naturelle a deux vecteurs de genre lumière et deux vecteurs spatiaux. Si l'on souhaite travailler dans un système où une coordonnée est de genre temps et les trois autres sont spatiales, on peut définir

$$u = \frac{u' - v'}{2} \quad \text{et} \quad v = \frac{u' + v'}{2} \quad (4.11)$$

qui sont finalement reliées à  $r$  et  $t$  par

$$u = \pm \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M) \quad (4.12)$$

$$v = \pm \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M), \quad (r \geq 2M) \quad (4.13)$$

et

$$u = \pm \left( 1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh(t/4M) \quad (4.14)$$

$$v = \pm \left( 1 - \frac{r}{2M} \right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh(t/4M), \quad (r \leq 2M) \quad (4.15)$$

où le signe “+” fait référence à “notre Univers”, décrit par les coordonnées de Schwarzschild, et le signe “-” à l’ “autre Univers”.

Les coordonnées  $(v, u, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées de Kruskal-Szekeres, où  $v$  est la coordonnée de genre temps. Dans ce système, la métrique s'écrit

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dv^2 + du^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (4.16)$$

La figure 4.2 donne une représentation graphique d'un trou noir de Schwarzschild en coordonnées de Kruskal-Szekeres. Notons que deux systèmes de coordonnées de Schwarzschild,

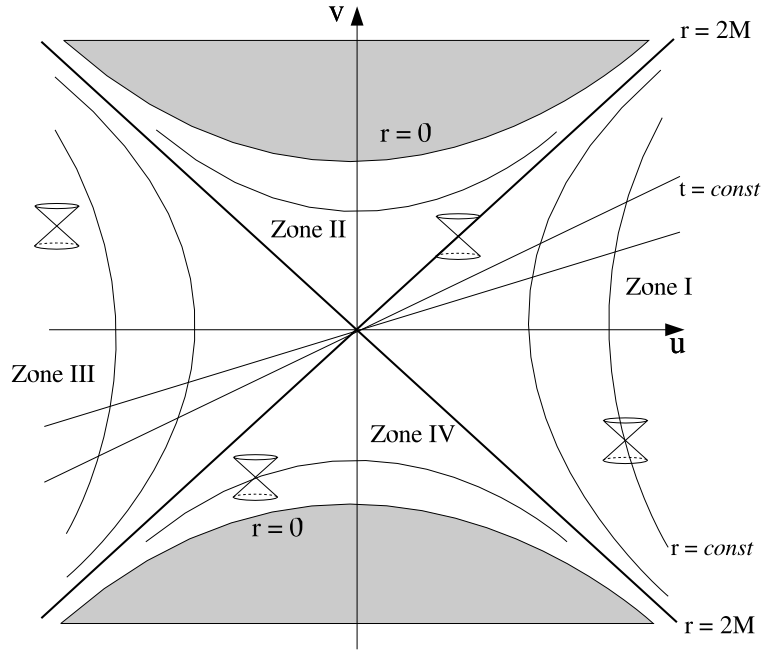


FIG. 4.2 – Diagramme d'espace-temps de Schwarzschild dans les coordonnées de Kruskal-Szekeres.

régions I, II et III, IV, sont nécessaires pour couvrir entièrement la géométrie de Schwarzschild, tandis qu'un seul système de coordonnées de Kruskal-Szekeres suffit.

Les géodésiques de genre lumière radiales sont décrites par  $v = \pm u + \text{constante}$  et sont donc des lignes à  $45^\circ$ , la même forme qu'en espace plat. L'horizon en  $r = 2M$  est représenté par les deux bissectrices  $v = \pm u$ . Partant de la région I, en suivant les géodésiques de genre lumière entrantes dirigées vers le futur, on atteint la région II, et en suivant les géodésiques de genre lumière entrantes dirigées vers le passé, on atteint la région IV.

Les surfaces  $r = \text{constante}$  sont décrites par les hyperboles  $u^2 - v^2 = \text{constante}$  et en particulier, la singularité en  $r = 0$  est représentée par les deux hyperboles  $u^2 - v^2 = 1$ .

Décrivons les différentes régions de la géométrie de Schwarzschild : la zone II est bien entendu le trou noir, et les régions III et IV ne semblaient pas attendues à priori. En fait, la région IV est simplement la région symétrique à la région II par renversement du temps. C'est une partie de l'espace-temps d'où les choses peuvent s'échapper vers nous, alors qu'il est impossible d'y aller. Elle peut être pensée comme un trou blanc et sa frontière est parfois appelée horizon des événements passés. La région III ne peut pas être atteinte à partir de notre région I, que ce soit dans le futur ou le passé. Il s'agit d'une autre région asymptotiquement plate de l'espace-temps, une image miroir de la nôtre (région I).

Examinons la géométrie de l'hypersurface spatiale  $v = 0$  du diagramme de Kruskal-Szekeres,

#### 4.4. TROU NOIR DE KERR

qui s'étend de  $u = +\infty (r = +\infty)$  à  $u = 0 (r = 2M)$  puis  $u = -\infty (r = -\infty)$ . Dans les coordonnées de Schwarzschild, c'est une tranche de temps constant,  $t = 0$ . On peut montrer (section 31.6 de [142]) que cette surface, dans l'espace euclidien de métrique  $d\sigma^2 = d\bar{r}^2 + d\bar{z}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\varphi}^2$ , avec un degré de liberté angulaire supprimé, est décrit par le paraboloïde de révolution

$$\bar{r} = 2M + \bar{z}^2/8M \quad (4.17)$$

Comme le montre la figure 4.3 qui représente cette surface, la géométrie de Schwarzschild de cette hypersurface spatiale  $t = 0$  est un pont connectant deux univers asymptotiquement plats distincts, mais identiques. Ce pont est parfois appelé "pont d'Einstein-Rosen" ou "gorge de Schwarzschild".

## 4.4 Trou noir de Kerr

Dans les années soixante dix, de nombreux théorèmes généraux sur les trous noirs ont été prouvés. On notera les travaux de Carter et Hawking qui ont montré qu'un trou noir stationnaire est complètement déterminé par la donnée de trois grandeurs uniquement : sa masse  $M$ , son moment cinétique  $J$  et sa charge électrique  $Q$ . D'où la phrase de Wheeler devenue célèbre : "un trou noir n'a pas de cheveux" ("a black hole has no hair" en anglais) signifiant qu'il n'existe pas de paramètres cachés pour décrire un trou noir, pas d'autres caractéristiques indépendantes. Pour une revue détaillée, voir Carter [37].

### 4.4.1 Coordonnées de Boyer-Lindquist

La métrique de Kerr décrit un trou noir chargé en rotation. Il est beaucoup plus difficile de trouver la solution exacte dans ce cas, puisqu'on doit abandonner la symétrie sphérique. Alors que la solution de Schwarzschild a été trouvée en 1915, la solution pour un trou noir en rotation ne fût trouvée qu'en 1963. Écrite dans les coordonnées de Boyer-Lindquist [31]  $(t, r, \theta, \varphi)$ , qui

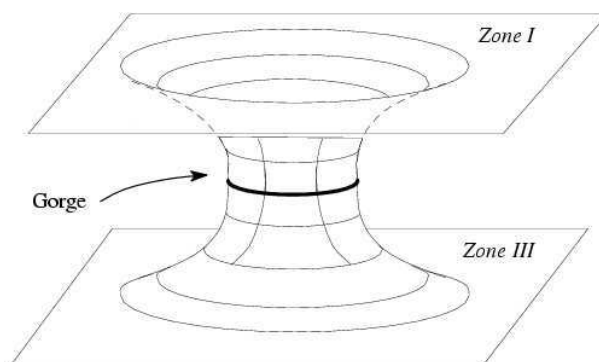


FIG. 4.3 – Pont d'Einstein-Rosen.

est une généralisation des coordonnées de Schwarzschild, la géométrie de Kerr-Newmann prend la forme

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2\theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\varphi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (4.18)$$

où l'on a défini

$$\Delta := r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (4.19)$$

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad (4.20)$$

$$a := J/M \quad (4.21)$$

où  $M$ ,  $J$  et  $Q$  sont respectivement la masse, le moment cinétique et la charge électrique du trou noir. Par la suite, on prend  $Q = 0$  qui est le seul cas astrophysique réaliste. En effet, si un trou noir est initialement chargé, il attirera par attraction électromagnétique des particules de charges opposées, le rendant rapidement neutre.

Il est facile de vérifier que lorsque  $a \rightarrow 0$ , on retrouve un trou noir de Schwarzschild dans les coordonnées de Schwarzschild. Si on garde  $a$  fixe tout en faisant tendre  $M$  vers 0, on retrouve un espace-temps plat en coordonnées elliptiques.

Les coefficients de la métrique de Kerr sont indépendants du temps  $t$  et de  $\varphi$ . L'espace-temps admet donc les deux vecteurs de Killing  $\zeta^\mu = \partial/\partial t$  et  $\eta^\mu = \partial/\partial\varphi$ . Le vecteur  $\eta^\mu$  exprime la symétrie axiale de la solution. Le vecteur  $\zeta^\mu$  n'est pas orthogonal aux hypersurfaces  $t = \text{constante}$ , la métrique est donc stationnaire mais pas statique.

Comme pour Schwarzschild, une singularité est présente en  $r = 0$ . Quand à l'horizon, on le trouve en annulant la fonction  $\Delta$ . Il apparaît en premier lieu pour la plus grande des racines de l'équation  $\Delta = 0$

$$r_+ = R_{\mathcal{H}} = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (4.22)$$

On peut montrer que la surface ainsi caractérisée est une surface nulle et correspond bien à l'horizon des évènements. Comme pour le trou noir de Schwarzschild, la métrique dans le système de coordonnées de Boyer-Lindquist est singulière sur l'horizon. Mais il s'agit encore une fois d'une pathologie de ce système de coordonnées. Notons que  $a$  doit être plus petit que  $M$  pour qu'un trou noir stationnaire existe. Si  $a$  devient plus grand que  $M$ , on obtient un espace-temps avec une singularité "nue", c'est à dire qui n'est pas enveloppée par un horizon. Penrose a proposé la conjecture suivante en 1969 [115] : "aucun objet ne peut donner naissance, en s'effondrant, à une singularité nue". Cette conjecture, connue sous le nom de censure cosmique, est un des problèmes majeurs non résolus de la physique des trous noirs. Aucun mécanisme n'est encore connu pour, à partir d'un trou noir de Kerr vérifiant  $a < M$ , l'accélérer de sorte que le paramètre de rotation devienne plus grand que la masse. Un trou noir tel que  $a = M$  est un trou noir de Kerr extrême. Ils ne devraient pas exister dans l'Univers puisqu'il n'est pas possible de faire tourner un trou noir plus vite que  $a/m = 0.998$  par des processus astrophysiques standards [137].

### 4.4.2 Ergosphère

En dehors de l'horizon des événements, la métrique de Kerr dévoile une autre surface d'intérêt. Pour le trou noir de Schwarzschild, le vecteur de Killing  $\zeta^\mu = \partial/\partial t$  devient nul sur l'horizon et de genre espace à l'intérieur. Pour un trou noir de Kerr, on obtient, pour  $r = R_{\mathcal{H}}$

$$\zeta^\mu \zeta_\mu = \frac{a^2}{\rho^2} \sin^2 \theta \geq 0, \quad (4.23)$$

donc  $\zeta^\mu$  est déjà de genre espace au niveau de l'horizon, sauf au pôle nord et sud ( $\theta = 0$ ). La surface sur laquelle  $\zeta^\mu$  devient nul, appelée limite statique, est donnée par

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (4.24)$$

Cette surface est à l'extérieur de l'horizon et coïncide uniquement avec celui-ci au niveau des pôles. Il existe donc une région de l'espace-temps entre l'horizon des événements et la limite statique, appelée **ergosphère**. A l'intérieur de l'ergosphère, il est impossible de rester au repos par rapport à l'infini, et tous les observateurs à  $(r, \theta)$  fixé doivent tourner avec le trou noir et dans la même direction que celui-ci. Quelle que soit la force avec laquelle, à  $(r, \theta)$  fixé, un observateur fait fonctionner ses moteurs, il ne peut stopper son mouvement cinétique par rapport à l'infini. Toutefois, notons que rien ne l'empêche de quitter l'ergosphère.

### 4.4.3 Extraction d'énergie à partir d'un trou noir

Grâce à l'existence de l'ergosphère, pour un trou noir de Kerr, il est possible d'extraire de l'énergie d'un trou noir : “By injecting matter into a black hole in a carefully chosen way, one can decrease the total mass-energy of the black hole - i.e., one can extract energy from the hole” (Penrose [115]).

En dehors de l'ergosphère, le vecteur de Killing  $\zeta^\mu = \partial/\partial t$  est de genre temps, de même que le 4-moment  $p^\mu$  de toutes particules tests, donc l'énergie  $E = -p^\mu \zeta_\mu$  est nécessairement positive. Mais, à l'intérieur de l'ergosphère,  $\zeta^\mu$  est de genre espace, donc pour des 4-moments bien

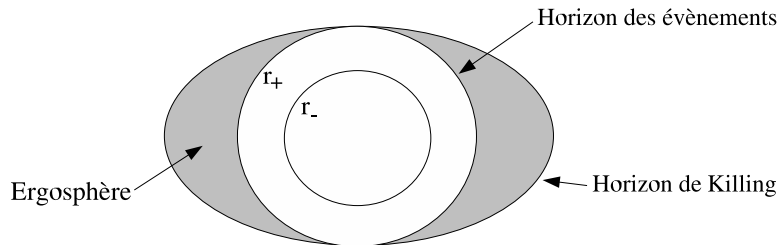


FIG. 4.4 – Illustration de l'ergosphère, région située entre l'horizon des événements et l'horizon de Killing où  $\zeta^\mu$  est nul.

choisis, on aura  $E = -p^\mu \zeta_\mu < 0$ . Précisons que les orbites avec  $E$  négatif sont entièrement contenues dans l'ergosphère. Donc, pour injecter un objet d'énergie négative au trou noir, et ainsi lui extraire de l'énergie, on doit modifier l'énergie de l'objet de positif à négatif, et par conséquent modifier son orbite, une fois franchie la limite statique. Pour illustrer, un observateur peut par exemple pénétrer dans l'ergosphère munie d'une pierre, qu'il jette d'une façon très spécifique afin que celle-ci ait une énergie négative et soit absorbée par le trou noir. Penrose a montré qu'il est possible de trouver une trajectoire initiale et un lancer tel que, après la séparation, l'observateur suive une géodésique vers l'Univers extérieur. Ainsi l'observateur ressort de l'ergosphère avec une énergie plus grande qu'à l'entrée ! Cette méthode est connue sous le nom de procédé de Penrose.

#### 4.4.4 Lois de la thermodynamique des trous noirs

La loi des aires ou d'incrément d'aire a été prouvée par Hawking en 1971 - 1972 [82, 83] : quel que soit ce qui tombe à l'intérieur d'un trou noir, pour toutes coalescences de trous noirs, ou pour tout autre processus physique faisant intervenir des trous noirs, la somme des aires des horizons ne peut jamais décroître.

Pour la métrique de Kerr, l'aire d'une section transverse de l'horizon est donnée par

$$A = 4\pi (R_{\mathcal{H}}^2 + a^2) = 4\pi \left[ \left( M + \sqrt{M^2 - a^2} \right)^2 + a^2 \right]. \quad (4.25)$$

On définit ensuite la masse irréductible par

$$M_{ir} = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}. \quad (4.26)$$

En raison du théorème d'incrément d'aire, la masse irréductible ne peut jamais décroître, d'où son nom. La masse irréductible est la masse minimum que l'on peut atteindre en extrayant de l'énergie au trou noir. Par combinaison des deux équations précédentes, on retrouve la formule de Christodoulou [45, 46]

$$M^2 = M_{ir}^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2} \quad (4.27)$$

Si on extrait toute l'énergie de rotation d'un trou noir de masse  $M$ , de façon réversible (masse irréductible fixe), le trou noir final sera un trou noir de Schwarzschild de masse  $M_{ir}$ . Le mieux que l'on puisse faire est de partir d'un trou noir de Kerr extrême : on peut ainsi récupérer environ 29% de son énergie, correspondant à toute l'énergie de rotation du trou noir de Kerr.

Finalement, en différenciant la masse irréductible, on peut obtenir la loi de balance énergétique, qui s'écrit

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_{\mathcal{H}} \delta J, \quad (4.28)$$

où  $\kappa$  est une fonction de  $a$  et  $M$  appelée gravité de surface du trou noir, et  $\Omega_{\mathcal{H}}$  est la vitesse angulaire du trou noir que l'on peut définir comme étant la vitesse angulaire minimum que peut avoir une particule à l'horizon. L'équation de balance énergétique fait penser au premier principe de la thermodynamique, qui s'écrit  $dE = TdS + \text{travail}$ . En raison de cette analogie avec

## 4.5. HORIZONS - HORIZONS ISOLÉS

---

la thermodynamique, l'équation (4.28) est appelée également premier principe de la mécanique des trous noirs. Les quantités analogues sont  $E \leftrightarrow M$ ,  $T \leftrightarrow \alpha\kappa$  et  $S \leftrightarrow (1/8\pi\alpha)A$ , avec  $\alpha$  une constante. Mais l'analogie ne s'arrête pas là. En fait, la loi d'incrément d'aire (4.25) est également connue sous le nom de seconde loi de la thermodynamique des trous noirs. En effet, aucun processus physique ne peut faire augmenter l'aire d'un trou noir,  $\delta A \geq 0$ , tout comme l'entropie, selon le second principe de la thermodynamique,  $\delta S \geq 0$ . Pour compléter l'analogie, la température est uniforme pour un corps en équilibre thermique. On retrouve la même propriété pour la quantité analogue à la température pour les trous noirs,  $\kappa$  étant constante sur l'horizon d'un trou noir en "équilibre", ou stationnaire. Cette propriété est appelée loi zéro de la thermodynamique des trous noirs.

Le fait que l'énergie  $E$  et la masse  $M$  ne sont pas que des quantités analogues mais représentent la même quantité physique fait penser que la similarité entre les principes thermodynamiques et de mécanique des trous noirs n'est pas qu'une simple analogie. Cependant, en relativité générale classique, la température thermodynamique d'un trou noir est absolument nulle, un trou noir n'émettant rien. Et donc, la gravité de surface ne semble pas pouvoir physiquement représenter une température. Pourtant, Hawking a découvert en 1974 que les effets quantiques de création de particules résultent en une émission effective de particules d'un trou noir avec un spectre de corps noir de température  $T = \hbar\kappa/2\pi$ . Ainsi,  $\kappa$  représente bien la température thermodynamique d'un trou noir et les relations entre la physique des trous noirs et la thermodynamique semblent bien être plus qu'une analogie. Les lois (4.25) et (4.28) pourraient être précisément les lois ordinaires de la thermodynamique appliquées à un trou noir.

## 4.5 Horizons - Horizons isolés

### 4.5.1 Hypersurfaces nulles

Une hypersurface  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{M}$  est l'image d'une variété de dimension 3,  $\mathcal{H}_0$ , par un plongement  $\Phi : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{M}$  tel que  $\mathcal{H} = \Phi(\mathcal{H}_0)$ . Une hypersurface peut être définie localement par l'ensemble des points pour lesquels un champ scalaire  $u$  est constant :

$$\forall p \in \mathcal{M}, \quad p \in \mathcal{H} \iff u(p) = 1. \quad (4.29)$$

Si on suppose que  $\mathcal{H}$  à une topologie  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$  alors on peut introduire localement un système de coordonnées de  $\mathcal{M}$ ,  $x^\alpha = (t, u, \theta, \varphi)$ , de telle sorte que  $t$  couvre  $\mathbb{R}$  et  $(\theta, \varphi)$  sont des coordonnées sphériques couvrant  $\mathbb{S}^2$ . On obtient alors une forme explicite d'application  $\Phi$  si on considère  $x^A = (t, \theta, \varphi)$  comme les coordonnées de  $\mathcal{H}_0$  :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{H}_0 &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (t, \theta, \varphi) &\longmapsto (t, 1, \theta, \varphi). \end{aligned} \quad (4.30)$$

L'homéomorphisme  $\Phi$  permet de définir une application de vecteurs dans  $\mathcal{H}$  à des vecteurs dans  $\mathcal{M}$  et une application de 1-formes dans  $\mathcal{M}$  à des 1-formes dans  $\mathcal{H}$  [74]. Cela nous permet notamment de définir une métrique  $q$  induite sur  $\mathcal{H}$ , ou première forme fondamentale de  $\mathcal{H}$ .



Dans le système de coordonnées  $x^A = (t, \theta, \varphi)$  de  $\mathcal{H}$ , les composantes de  $q$  sont données par  $q_{AB} = g_{AB}$ .

L'hypersurface  $\mathcal{H}$  est dite nulle si, et seulement si, la métrique  $q$  est dégénérée. C'est-à-dire si, et seulement si, il existe un champ de vecteurs  $\ell$  dans  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ , l'espace tangent de  $\mathcal{H}$ , qui est orthogonal (par rapport à  $q$ ) à tous vecteurs de  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$  :

$$\forall v \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), \quad q_{AB} \ell^A v^B = 0. \quad (4.31)$$

La signature de  $q$  est alors nécessairement  $(0, +, +)$ . D'une manière équivalente, une hypersurface nulle demande que tout champ de vecteurs  $\ell$  dans  $\mathcal{T}(\mathcal{M})$  qui est orthogonal à tout vecteur de  $\mathcal{T}(\mathcal{H})$  soit un vecteur nul par rapport à la métrique  $g$  :

$$\ell \cdot \ell = g_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu = 0. \quad (4.32)$$

Le  $\ell$  dans cette définition n'est rien d'autre que le push-forward du  $\ell$  de la définition précédente. En fait, en disant que  $\ell$  est orthogonal à lui-même, l'équation (4.32) montre que  $\ell$  est tangent à  $\mathcal{H}$ . Une propriété caractéristique des hypersurfaces nulles est que leurs vecteurs normaux sont en même temps orthogonaux et tangents à l'hypersurface.

Puisque  $\ell$  est à la fois nul et normal à  $\mathcal{H}$ , on peut montrer qu'il est pré-géodésique [74], c'est-à-dire que

$$\nabla_\ell \ell^\mu \stackrel{\mathcal{H}}{=} \kappa \ell^\mu. \quad (4.33)$$

Dans le cas d'un trou noir stationnaire (trou noir de Kerr), où  $\ell^\mu$  peut être étendu à la symétrie hélicoïdale de l'espace-temps,  $\kappa$  est la gravité de surface introduite dans la section 4.4.4. Par extension, on utilisera le terme gravité de surface pour toute surface nulle. L'équation (4.33) signifie que  $\ell$  reste colinéaire à lui-même quand il est transporté parallèlement le long de ses lignes de champs, ce qui implique que ses lignes de champs sont des géodésiques de l'espace-temps. En effet,  $\ell$  étant de norme nulle, il n'existe pas de normalisation naturelle de  $\ell$ , contrairement au cas d'hypersurfaces spatiales où il est toujours possible de choisir un vecteur normal unitaire. On peut donc renormaliser  $\ell$  par un facteur  $\alpha$ ,  $\ell' = \alpha \ell$ , pour se ramener grâce à un choix judicieux du scalaire  $\alpha$  à l'équation des géodésiques classique  $\nabla_\ell \ell^\mu = 0$ . Notons que pour différents choix de  $\ell^\mu$ , la gravité de surface est différente.

En se plaçant maintenant dans le formalisme 3+1, chaque hypersurface de genre espace  $\Sigma_t$  coupe l'hypersurface nulle  $\mathcal{H}$  en une surface  $\mathcal{S}_t$  de dimension 2 :  $\mathcal{S}_t := \mathcal{H} \cap \Sigma_t$ . Appelons  $s$  le vecteur unitaire de  $\Sigma_t$ , normal à  $\mathcal{S}_t$  et dirigé vers l'extérieur de  $\mathcal{S}_t$ . Il est possible de normaliser le vecteur  $\ell^\mu$  en utilisant le feuilletage. En effet, si on impose la condition  $\ell^\mu \nabla_\mu t = 1$ , on peut montrer [74] que  $\ell$  admet la décomposition suivante

$$\ell = N (\mathbf{n} + s), \quad (4.34)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal aux hypersurfaces  $\Sigma_t$  du formalisme 3+1 et  $N$  est la fonction lapse. En fait, d'après la remarque précédente, il n'existe pas de normalisation unique de la normale nulle  $\ell$  donc on aurait pu choisir n'importe quel autre scalaire à la place du lapse  $N$ . Les rayons lumineux émis dans la direction nulle radiale sortante définissent le vecteur nul  $\ell$  tangent à  $\mathcal{H}$ ,

#### 4.5. HORIZONS - HORIZONS ISOLÉS

---

et ceux émis dans la direction nulle radiale entrante définissent un autre vecteur nul  $\mathbf{k}$  admettant la décomposition suivante :

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2N} (\mathbf{n} - \mathbf{s}), \quad (4.35)$$

où la normalisation a été choisie de telle sorte que  $\ell \cdot \mathbf{k} = -1$ . Le fait que  $\ell \cdot \mathbf{k} \neq 0$  montre que le vecteur  $\mathbf{k}$  est transverse à  $\mathcal{H}$ . Les vecteurs  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\ell$  et  $\mathbf{k}$  sont représentés sur la figure 4.5.

On est en mesure de définir le scalaire d'expansion  $\theta$  par

$$\theta = q^{\mu\nu} \nabla_\mu \ell_\nu, \quad (4.36)$$

où  $q^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} - s^\mu s^\nu$ . Il est possible d'établir une expression équivalente de ce scalaire [74]

$$\theta = {}^{\mathcal{H}}\mathcal{L}_\ell \ln \sqrt{q} \quad (4.37)$$

où  ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{L}_\ell$  est la dérivée de Lie suivant  $\ell$  dans la surface nulle  $\mathcal{H}$  et  $q$  est le déterminant de la métrique  $q_{ab}$  induite par  $q_{AB}$  sur  $\mathcal{S}_t$ . L'équation (4.37) justifie le nom de scalaire d'expansion donné à  $\theta$ . En effet,  $\sqrt{q}$  étant relié à l'élément de surface de  $\mathcal{S}_t$ ,  $\theta$  est une mesure du taux d'expansion des 2-surfaces  $\mathcal{S}_t$ .

De la même manière, on définit le scalaire d'expansion transverse  $\theta_{(\mathbf{k})}$  comme

$$\theta_{(\mathbf{k})} = q^{\mu\nu} \nabla_\mu k_\nu. \quad (4.38)$$

##### 4.5.2 Horizons des événements et horizons apparents

Un horizon des événements est la frontière de la région qui ne peut communiquer avec l'extérieur. Plus précisément, les photons émis à l'intérieur de l'horizon ne peuvent atteindre un observateur situé à l'infini. C'est l'aire de ce type d'horizon qui intervient dans la seconde loi de la thermodynamique. Mais cette surface est difficile à déterminer car il s'agit d'une notion globale de l'espace-temps. Pour la déterminer il est nécessaire de connaître la géométrie de tout l'espace-temps.

Avant de définir le concept d'horizon apparent, on doit introduire la notion de surface piégée. Une surface piégée a été définie par Penrose en 1965 [114] comme une 2-surface  $\mathcal{S}$  fermée de genre espace telle que les deux systèmes de géodésiques nulles partant orthogonalement de  $\mathcal{S}$  convergent localement, c'est-à-dire qu'elles ont un scalaire d'expansion non-positif. Demander qu'une 2-surface spatiale  $\mathcal{S}_t = \mathcal{H} \cap \Sigma_t$  soit une surface piégée est donc équivalent à

$$\theta \leq 0 \quad \text{et} \quad \theta_{(\mathbf{k})} \leq 0. \quad (4.39)$$

La sous-classe  $\theta = 0$  ou  $\theta_{(\mathbf{k})} = 0$  est appelée surface marginalement piégée.

D'une manière un peu différente, Hawking [84] a introduit le concept de surface piégée externe (outer trapped surface) comme la 2-surface  $\mathcal{S}$  contenue dans une hypersurface spatiale  $\Sigma$  et telle que les géodésiques nulles "sortantes" convergent localement. Pour savoir si la géodésique nulle est sortante, il est nécessaire de définir une notion d'extérieur. Pour cela, on demande que

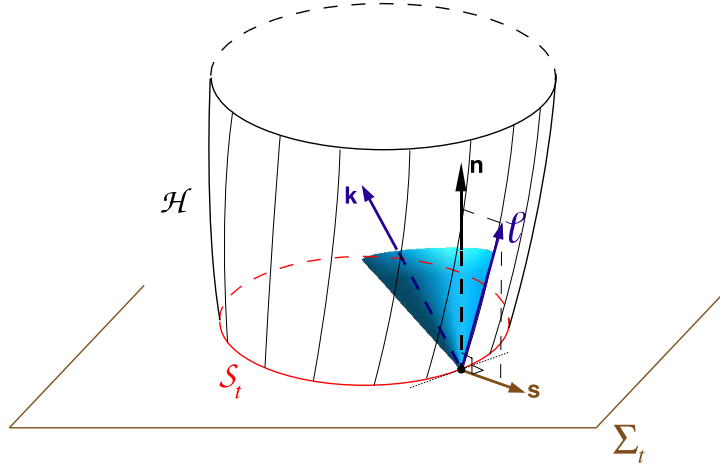


FIG. 4.5 – Vecteur unitaire de genre temps  $n$  normal à  $\Sigma_t$ , vecteur unitaire de genre espace  $s$  normal à  $S_t$ , vecteur nul unitaire  $\ell$  normal à  $\mathcal{H}$  et vecteur nul entrant  $k$  normal à  $S_t$ . D’après Gourgoulhon et Jaramillo [74].

la 2-surface spatiale  $\mathcal{S} = \mathcal{H} \cap \Sigma$  soit dans une hypersurface  $\Sigma$  asymptotiquement plate. L’extérieur de  $\mathcal{S}$  est alors la partie contenant la région asymptotiquement plate. La surface  $\mathcal{S}$  est une surface piégée externe si  $\ell$  est un vecteur normal nul sortant et que le scalaire d’expansion de  $\ell$  est négatif :

$$\theta \leq 0. \quad (4.40)$$

La sous classe  $\theta = 0$  est appelée surface marginalement piégée externe.

Hawking introduit alors le concept d’horizon apparent, qu’il identifie à la 2-surface marginalement piégée la plus externe. Un horizon apparent coïncide ou est situé à l’intérieur de l’horizon des événements. Dans le cas de trous noirs axisymétriques et stationnaires, tels que les trous noirs de Schwarzschild ou de Kerr, ces deux types d’horizons coïncident. La notion d’horizon apparent est largement utilisée en relativité numérique (voir par exemple [44, 77, 109, 121, 136]) car elle repose seulement sur une connaissance locale de l’espace-temps. Plus concrètement, on peut l’identifier uniquement à partir de la connaissance de la géométrie sur une partie de l’hypersurface  $\Sigma_t$ . Cependant, contrairement aux horizons des événements, rien ne garantit que l’évolution d’un horizon apparent génère un tube d’univers continu. De plus, le tube d’univers d’horizons apparents est généralement spatial et non nul. Bien entendu, dans le cas où le tube d’univers est spatial, le vecteur  $\ell$  intervenant dans la définition des surfaces piégées n’est pas le générateur du tube d’univers contrairement au cas des hypersurfaces nulles.

La figure 4.6 montre un exemple d’horizons apparents et d’horizons des événements lors de l’effondrement d’une étoile en trou noir puis de l’absorption d’une autre étoile par le trou noir. On remarque que le tube d’Univers formé par les horizons apparents est discontinu alors que l’horizon des événements est bien continu. On voit aussi que l’horizon apparent est bien toujours à l’intérieur de l’horizon des événements. On représente également quelques géodésiques nulles. Toutes les géodésiques nulles partant d’un point à l’intérieur de l’horizon des évé-

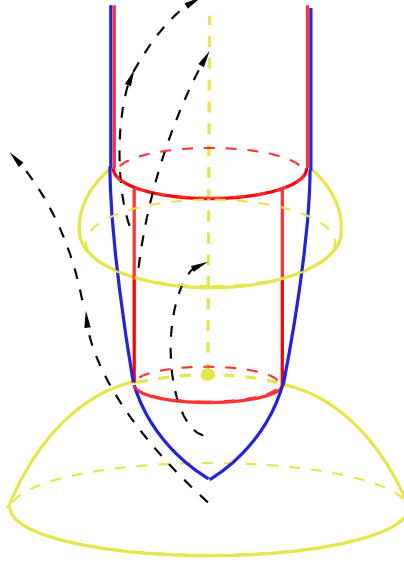


FIG. 4.6 – Horizons apparents (en rouge) et horizon des événements (en bleu) lors de l’effondrement d’une étoile en trou noir puis de l’absorption d’une autre étoile par le trou noir. Quelques exemples de géodésiques nulles sont représentées en pointillées noirs.

ments finissent par tomber sur la singularité spatiale, même celles partant d’un point extérieur à l’horizon apparent.

##### 4.5.3 Horizons isolés

Le formalisme des horizons isolés décrit des espace-temps dynamiques contenant un trou noir en équilibre, c’est-à-dire où ni matière ni radiation ne traverse l’horizon. L’idée est d’extraire de la notion d’horizon de Killing les conditions minimales qui sont nécessaires pour définir des quantités physiques telles que la masse ou le moment cinétique du trou noir et d’établir la loi zéro et la première loi de la mécanique des trous noirs. Une caractéristique très importante des horizons isolés est leur caractère (quasi-)local. En relativité numérique, ce caractère (quasi-)local est fondamental, les simulations numériques étant basées sur une approche 3+1, il est difficile d’avoir un contrôle sur les propriétés globales de l’espace-temps. De plus, cela permet de traiter le concept d’équilibre d’une façon (quasi-)locale. La notion d’horizon apparent, caractérisée localement comme une surface marginalement piégée la plus externe dans une tranche spatiale  $\Sigma_t$ , semble être un bon point de départ. Cependant, afin d’inclure le concept d’équilibre, il est nécessaire de considérer l’évolution de cette 2-surface. Dans un régime de (quasi-)équilibre, la notion de tube d’univers d’horizons apparents prend un sens, les discontinuités étant absentes. Un horizon isolé est basé sur l’idée d’un horizon apparent associé à un trou noir en équilibre, et évoluant continuellement vers des horizons apparents de même aire, de manière à ce que le tube d’univers ainsi généré soit une hypersurface nulle. C’est ce caractère

nul qui assure que le trou noir soit en quasi-équilibre.

La définition des horizons isolés reprend les ingrédients fondamentaux d'un tube d'univers nul d'horizons apparents non-expansifs. De plus, on attribue au tube d'univers des structures géométriques additionnelles intrinsèques aux hypersurfaces nulles. Cela introduit une hiérarchie de structures dans le formalisme, définissant en premier lieu les horizons non-expansifs puis les horizons faiblement isolés et enfin les horizons fortement isolés.

#### 4.5.3.1 Horizons non-expansifs

On dit qu'une hypersurface  $\mathcal{H}$  dans un espace-temps  $(\mathcal{M}, g_{\mu\nu})$  du vide est un horizon non-expansif si [9] :

1. C'est une hypersurface nulle de topologie  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ .
2. Le scalaire d'expansion  $\theta$  est nul sur  $\mathcal{H}$  :

$$\theta \stackrel{\mathcal{H}}{=} 0. \quad (4.41)$$

3. Les équations d'Einstein sont satisfaites sur  $\mathcal{H}$ .

La notion d'horizon non-expansif repose sur l'idée de quasi-équilibre. En effet, l'aire de l'horizon apparent  $a = \int_{\mathcal{S}} \sqrt{q} d^2q$  reste constant, sachant que l'équation (4.37) donne  ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{L}_{\ell} \ln \sqrt{q} = \theta = 0$ . Ainsi, il existe une notion bien posée de rayon de l'horizon,  $R_{\mathcal{H}} = \sqrt{a}/(4\pi)$ .

Introduisons la seconde forme fondamentale  $\Theta_{\mu\nu}$  de  $\mathcal{H}$  définie par :

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} q^\alpha{}_\mu q^\beta{}_\nu \mathcal{L}_{\ell} q_{\alpha\beta}. \quad (4.42)$$

En se restreignant aux surfaces  $\mathcal{S}_t$ , c'est-à-dire aux tranches d'horizons apparents, on décompose la seconde forme fondamentale, également appelée tenseur taux de déformation, selon sa trace et sa partie sans trace par rapport à la métrique  $q$  donnant

$$\Theta_{ab} = \frac{1}{2} \theta q_{ab} + \sigma_{ab}, \quad (4.43)$$

où la partie sans trace  $\sigma_{ab}$  est appelée tenseur de cisaillement. En utilisant l'équation de Raychaudhuri dans le vide et pour une expansion nulle  $\theta = 0$ , on obtient que le tenseur de cisaillement est nul également [74]. On en conclut que pour un horizon non-expansif, non seulement l'expansion s'annule mais aussi le tenseur taux de déformation

$$\Theta_{ab} = 0. \quad (4.44)$$

On peut montrer que cela implique que  ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{L}_{\ell} q_{ab} = 0$ , ce qui signifie que la métrique riemannienne des 2-surfaces  $\mathcal{S}_t$  est invariante lorsque  $t$  évolue.

#### 4.5. HORIZONS - HORIZONS ISOLÉS

---

Puisque le tenseur de cisaillement et l'expansion  $\theta$  sont nuls sur  $\mathcal{H}$ , et que  $\ell^\mu$  est normal aux hypersurfaces  $\mathcal{H}$ , on peut montrer qu'il existe une 1-forme  $\omega_\mu$  [74] tel que, pour tout vecteur  $v^\mu$  tangent à  $\mathcal{H}$

$$v^\nu \nabla_\nu \ell_\mu \stackrel{\mathcal{H}}{=} v^\nu \omega_\nu \ell_\mu. \quad (4.45)$$

Cette 1-forme, également appelée 1-forme de rotation, va jouer un rôle central pour introduire le prochain niveau de la hiérarchie des horizons isolés.

Nous avons déjà mentionné que,  $\ell$  étant un vecteur de genre lumière, il n'existait pas de normalisation naturelle de  $\ell$ . Les lois de transformations des différents objets géométriques sous une transformation  $\ell_\mu \rightarrow \lambda \ell_\mu$ , où  $\lambda$  est une fonction sur  $\mathcal{H}$ , sont les suivantes :

$$\begin{aligned} q_{ab} &\rightarrow q_{ab}, \\ \Theta_{ab} &\rightarrow \lambda \Theta_{ab}, \\ \omega_\mu &\rightarrow \omega_\mu + \nabla_\mu \ln \lambda, \\ \kappa &\rightarrow \lambda \kappa + \ell^\mu \nabla_\mu \lambda. \end{aligned} \quad (4.46)$$

##### 4.5.3.2 Horizons faiblement isolés

La notion d'horizon non-expansif représente un premier pas dans la caractérisation quasi-locale d'un trou noir en équilibre. Nous avons vu qu'il consiste essentiellement à imposer que la métrique dégénérée  $q$  est indépendante du temps. D'un côté, cette condition géométrique est suffisamment flexible pour représenter une grande variété de scénarios physiques. Mais d'un autre côté, cette structure n'est pas assez stricte pour pouvoir déterminer certaines propriétés physiques ou géométriques d'un trou noir. Par exemple, elle ne permet pas de choisir une normalisation particulière de la normale de genre lumière, et ne fournit aucune prescription pour la masse ou le moment cinétique d'un trou noir.

En suivant Ashtekar *et al.* [9], si l'on souhaite une caractérisation plus fine de la notion de quasi-équilibre, cela demande l'introduction de structures additionnelles sur  $\mathcal{H}$ . Après avoir imposé à la métrique dégénérée  $q$  d'être indépendante du temps, il est naturel d'étendre cette condition aux autres objets géométriques sur  $\mathcal{H}$ , et en particulier à la connexion  $\hat{\nabla}$  induite sur  $\mathcal{H}$  par la connexion de l'espace-temps  $\nabla$  ( $\hat{\nabla}$  est bien définie car on peut montrer que pour tout vecteur  $u$  et  $v$  tangents à  $\mathcal{H}$ ,  $\nabla_v u$  est également tangent à  $\mathcal{H}$  d'où la définition  $\hat{\nabla}_v u = \nabla_v u$ ). Cette stratégie conduit directement à une hiérarchie de structures de quasi-équilibres sur l'horizon. Avant d'imposer l'indépendance par rapport au temps à la connexion complète  $\hat{\nabla}$ , qui constituera le dernier niveau des horizons isolés, on procède à un pas intermédiaire où seules les composantes  $\omega$  de la connexion  $\hat{\nabla}$  (voir Eq. (4.45)) sont supposées être indépendantes du temps.

La notion d'horizon non-expansif est indépendant d'une renormalisation du vecteur de genre lumière normal  $\ell$ . Par contre, du fait des lois de transformation (4.46), imposer que la 1-forme de rotation  $\omega$  est indépendante du temps dépend du choix de  $\ell$ . Si on considère une normale de genre lumière  $\ell$  telle que  ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{L}_\ell \omega = 0$ , alors après une renormalisation de  $\ell$  par une fonction non constante,  $\omega$  ne sera pas indépendant du temps en général. On introduit donc une première définition : deux normales de genre lumière  $\ell$  et  $\ell'$  sont dites liées l'une à l'autre si et seulement

si  $\ell = c\ell'$  où  $c$  est une constante positive. Cela définit une relation d'équivalence dont la classe d'équivalence est notée  $[\ell]$ .

Un horizon faiblement isolé  $(\mathcal{H}, [\ell])$  est un horizon non-expansif  $\mathcal{H}$  associé à une classe d'équivalence  $[\ell]$  de normales de genre lumière telles que

$$\mathcal{H} \mathcal{L}_\ell \omega = 0. \quad (4.47)$$

On montre [74] que cette condition est équivalente à

$$\hat{\nabla}_A \kappa_{(\ell)} = 0, \quad (4.48)$$

donc la gravité de surface d'un  $\ell \in [\ell]$  donné est constant sur  $\mathcal{H}$ . Cette propriété, la loi zéro de la thermodynamique des trous noirs, caractérise la notion d'horizons faiblement isolés.

On peut signaler que, étant donné un horizon non-expansif, il est toujours possible de sélectionner une classe de normales de genre lumière  $[\ell]$  tel que  $\mathcal{H}$  soit un horizon faiblement isolé. L'introduction de la structure d'horizon faiblement isolé n'introduit donc pas de restriction sur la physique du système. Au contraire, il existe même un nombre infini d'horizons faiblement isolés non équivalents [74].

Tournons nous maintenant vers la détermination des paramètres physiques associés à l'horizon du trou noir. L'introduction de la structure des horizons faiblement isolés permet d'associer une notion quasi-locale de masse et de moment cinétique au trou noir, indépendamment de son environnement, ce qui est d'un intérêt astrophysique fondamental pour l'étude des trous noirs. En effet, la masse ADM, par exemple, d'un espace-temps asymptotiquement plat tient compte de la masse totale dans une hypersurface spatiale  $\Sigma_t$ . Mais, dans un système binaire elle ne permet pas de déterminer quelle part est associée avec le trou noir et quelle part correspond à l'énergie de liaison ou de radiation gravitationnelle.

La stratégie pour déterminer les expressions de la masse ou du moment cinétique d'un horizon faiblement isolé repose sur des techniques hamiltoniennes que nous n'allons pas décrire ici. L'idée générale est d'identifier les paramètres physiques à des quantités conservées sous certaines transformations associées à des symétries de l'horizon faiblement isolé. En suivant Ashtekar *et al.* [9], on suppose qu'il existe une symétrie azimutale sur l'horizon  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire qu'il existe un vecteur  $\varphi^\mu$  tangent à  $\mathcal{S}$ , qui soit une isométrie  $SO(2)$  de la métrique induite  $q_{ab}$  de longueur affine  $2\pi$ .

La quantité conservée associée à l'extension de  $\varphi^\mu$  à l'espace-temps est donnée par [8]

$$J_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} \varphi^\mu \omega_\mu d^2V = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{S}} s^i \varphi^j K_{ij} d^2V, \quad (4.49)$$

où  $s^i$  est le vecteur unitaire sur  $\Sigma_t$  normal à l'horizon apparent  $\mathcal{S}$ . Cette expression justifie le nom de 1-forme de rotation donné à  $\omega$ .

La définition de la masse est liée au choix du vecteur d'évolution  $t$ . Puisque l'on veut que la restriction de  $t$  à  $\mathcal{H}$  soit une symétrie de l'horizon faiblement isolé  $(\mathcal{H}, [\ell])$ , on demande que  $t$  soit de la forme [8]

$$(t + \Omega_t \varphi)|_{\mathcal{H}} \in [\ell], \quad (4.50)$$

#### 4.5. HORIZONS - HORIZONS ISOLÉS

---

où  $\Omega_t$  est une constante sur l'horizon. La détermination de la masse procède alors en deux étapes.

Tout d'abord, le vecteur  $t$  doit satisfaire certaines conditions pour induire une transformation canonique sur l'espace des phases. On montre que cela devient équivalent à la première loi de la thermodynamique des trous noirs [8], dont la conséquence est que la masse, la gravité de surface et la vitesse angulaire dépendent seulement de deux paramètres, le rayon  $R_{\mathcal{H}}$  et le moment cinétique  $J_{\mathcal{H}}$  du trou noir.

Puis, dans un second temps, on doit fixer la forme fonctionnelle des paramètres physiques en fonction de  $R_{\mathcal{H}}$  et  $J_{\mathcal{H}}$ . Si on impose qu'elle coïncide avec celle de la famille de Kerr, cela fixe complètement la dépendance en  $R_{\mathcal{H}}$  et  $J_{\mathcal{H}}$ . Les expressions finales obtenues pour les paramètres physiques de l'horizon sont

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{H}}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}}) &:= M_{Kerr}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}}) = \frac{\sqrt{R_{\mathcal{H}}^4 + 4J_{\mathcal{H}}^2}}{2R_{\mathcal{H}}} \\ \kappa_{\mathcal{H}}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}}) &:= \kappa_{Kerr}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}}) = \frac{R_{\mathcal{H}}^4 - 4J_{\mathcal{H}}^2}{2R_{\mathcal{H}}^3 \sqrt{R_{\mathcal{H}}^4 + 4J_{\mathcal{H}}^2}} \\ \Omega_{\mathcal{H}}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}}) &:= \Omega_{Kerr}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}}) = \frac{2J_{\mathcal{H}}}{R_{\mathcal{H}} \sqrt{R_{\mathcal{H}}^4 + 4J_{\mathcal{H}}^2}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

##### 4.5.3.3 Horizons fortement isolés

Le troisième et dernier niveau dans la hiérarchie des horizons isolés est donné par la notion d'horizons fortement isolés. Partant d'un horizon non-expansif, on demande que la connexion  $\hat{\nabla}$  complète soit indépendante du temps. Se référant à Ashtekar *et al.* [11], un horizon fortement isolé, ou simplement un horizon isolé, est défini comme un horizon non-expansif avec une classe d'équivalence  $[\ell]$  tel que

$$\left[ {}^{\mathcal{H}}\mathcal{L}_{\ell}, \hat{\nabla} \right] = 0. \quad (4.52)$$

Cette structure permet notamment de définir un ensemble de multipôles de masse et de moments cinétiques caractérisant complètement le trou noir [10].

En termes simples, un horizon isolé est un horizon non-expansif pour lequel tous les objets définissant la géométrie nulle  $(q, \hat{\nabla})$  sont indépendants du temps. Il représente le plus haut degré de stationnarité de l'horizon défini d'une manière quasi-locale. Cependant, la notion d'horizon isolé est moins restrictive que celle d'horizon de Killing, pour lequel on impose la stationnarité non seulement sur l'horizon mais aussi à son voisinage. On peut avoir un horizon isolé tel qu'il n'existe pas de vecteur de killing dans le voisinage de l'horizon. Par conséquent, un horizon isolé permet de modéliser un horizon stationnaire dans un espace-temps dynamique.





# Chapitre 5

## Méthodes spectrales

### Sommaire

---

<b>5.1 Principe . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>5.2 Polynômes de Chebyshev . . . . .</b>	<b>77</b>
<b>5.3 Équations différentielles . . . . .</b>	<b>79</b>
<b>5.4 Décomposition multi-domaines . . . . .</b>	<b>81</b>
5.4.1 Phénomène de Gibbs . . . . .	81
5.4.2 Approche multi-domaines . . . . .	82
<b>5.5 Problème à trois dimensions . . . . .</b>	<b>84</b>
5.5.1 Système de coordonnées . . . . .	84
5.5.2 Bases de décomposition spectrale . . . . .	85

---

En relativité numérique, il existe deux grandes classes de méthodes numériques : les méthodes aux différences finies et les méthodes spectrales. Dans les méthodes aux différences finies, une fonction est décrite par sa valeur sur un ensemble discret de points de grilles. Le problème majeur est que la convergence, en fonction du nombre de points de grille, de la précision d'opérations, telles que les dérivées, est relativement lente. Une précision correcte nécessite un nombre de points importants et par conséquent beaucoup de temps de calcul.

Contrairement aux méthodes aux différences finies, qui reposent sur une connaissance locale des fonctions (sur les points de la grille), les méthodes spectrales reposent sur leur connaissance **globale**. Leur principe consiste à projeter toute fonction sur une base finie de fonctions dont les propriétés sont connues. On utilise alors les coefficients de cette projection pour effectuer les opérations ou résoudre des équations différentielles. La précision obtenue est rapidement excellente même avec relativement peu de fonctions de développements. Pour plus de précisions sur les méthodes spectrales, on pourra se référer à Gottlieb et Orzag [69] et à Canuto *et al.* [36].

## 5.1 Principe

Considérons une famille de  $N + 1$  polynômes  $\phi_n$  de degré  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , orthogonaux entre eux dans l'espace de Hilbert  $L_\omega^2[-1, 1]$  équipé du produit scalaire

$$\forall f, g \in L_\omega^2[-1, 1], \quad (f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) \omega(x) dx, \quad (5.1)$$

où  $\omega$  est une fonction positive, continue et intégrable sur  $[-1, 1]$  appelée mesure. La famille des polynômes  $\phi_n$  forme une base de  $P_N$ , l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à  $N$ .

La représentation spectrale d'une fonction  $u \in L_\omega^2[-1, 1]$  est sa projection orthogonale sur  $P_N$ , c'est-à-dire le polynôme  $P_N u$  défini par

$$P_N u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n \phi_n(x) \quad (5.2)$$

où les coefficients  $\hat{u}_n$  sont donnés par le produit scalaire

$$\hat{u}_n = \frac{1}{(\phi_n, \phi_n)} (\phi_n, u). \quad (5.3)$$

L'erreur commise en évaluant  $u$  via  $P_N u$  est appelée erreur de quadrature. Elle tend vers zéro lorsque le nombre de polynômes  $N$  tend vers l'infini.

Le produit scalaire  $(\phi_n, \phi_n)$  est connu exactement et analytiquement, suivant la base de polynômes choisie. Par contre, l'intégrale  $(\phi_n, u) = \int_{-1}^1 \phi_n(x) u(x) \omega(x) dx$  ne peut pas être calculée exactement. Le meilleur moyen pour l'évaluer numériquement est d'utiliser l'intégration de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x) \omega(x) dx = \sum_{n=0}^N \omega_n f(x_n), \quad (5.4)$$

où les  $\omega_n$  sont appelés **poids** et les  $x_n$ , appelés **points de collocation**, sont les  $N + 1$  racines du polynôme  $\phi_{N+1}$ . La formule (5.4) est exacte pour tout polynôme  $f(x) \in P_{2N+1}$ .

Il existe une variante, l'intégration de Gauss-Lobatto, qui permet d'adapter les points de collocation aux bornes de l'intervalle  $[-1, 1]$  :  $x_0 = -1, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = 1$ . Les  $x_n$  sont les zéros du polynôme  $P = \phi_{N+1} + \lambda \phi_N + \mu \phi_{N-1}$ , avec  $\lambda$  et  $\mu$  choisis de sorte que  $P(-1) = P(1) = 0$ . La formule (5.4) n'est alors exacte que pour tout polynôme  $f(x) \in P_{2N-1}$ .

Les coefficients  $\hat{u}_n$  peuvent maintenant être évalués en utilisant l'approximation de Gauss pour calculer l'intégrale  $(\phi_n, u)$ , donnant les coefficients discrets  $\tilde{u}_n$

$$\tilde{u}_n = \frac{1}{\gamma_n} \sum_{k=0}^N \omega_k \phi_n(x_k) u(x_k) \quad (5.5)$$

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^N \omega_k \phi_n^2(x_k). \quad (5.6)$$

## 5.2. POLYNÔMES DE CHEBYSHEV

La représentation numérique  $I_N u$  d'une fonction  $u \in L^2_\omega[-1, 1]$  est le polynôme formé à partir de ces coefficients discrets

$$I_N u(x) = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n \phi_n(x). \quad (5.7)$$

Numériquement, c'est cette quantité qui sera utilisée comme approximation de la fonction  $u$ . On peut montrer que  $I_N u$  est le polynôme interpolant de  $u$  aux  $N + 1$  points de collocation  $x_n$ , c'est-à-dire  $I_N u(x_n) = u(x_n)$  pour  $0 \leq n \leq N$ . Par contre, la projection orthogonale  $P_N u$  ne passe pas nécessairement par les points  $x_n$ .

La différence entre  $I_N u$  et  $P_N u$ , c'est-à-dire entre les coefficients  $\tilde{u}_n$  et  $\hat{u}_n$ , est l'*erreur d'aliasing*. Elle peut être vue comme une contamination de  $\tilde{u}_n$  par les hautes fréquences  $\tilde{u}_k$  avec  $k > N$  lorsqu'on effectue l'intégration de Gauss.

Il y a équivalence entre la donnée de  $u$  aux points de collocation et la donnée des coefficients discrets. Pour calculer la dérivée de la fonction  $u$ , par exemple, on utilisera l'espace des coefficients pour écrire

$$u'(x) = (I_N u(x))' = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n (\phi_n(x))'. \quad (5.8)$$

Les dérivées des polynômes  $\phi_n$  sont connues et s'écrivent comme une somme des  $\phi_n$ .

La figure 5.1 montre les interpolants de la fonction  $u(x) = \sin^2(\pi x/2) + (x+1)^2/12 + x/4$  et sa dérivée pour  $N = 4$  et  $N = 8$ , c'est-à-dire un nombre de points de collocation, ou identiquement de coefficients, de respectivement 5 et 9. On peut voir que la convergence est extrêmement rapide, la fonction et son interpolant n'étant plus distinguable dès  $N = 8$ .

## 5.2 Polynômes de Chebyshev

Pour effectuer la décomposition spectrale, on choisit généralement les *polynômes de Chebyshev* ou de *Legendre* comme base de l'espace vectoriel  $P_N$ . Dans notre groupe, à Meudon, le choix a été porté sur les polynômes de Chebyshev. Ils sont définis par

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \quad (5.9)$$

où  $T_n$  est un polynôme de degré  $n$ . On peut les construire grâce à la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (5.10)$$

ce qui donne pour les premiers polynômes, représentés sur la figure 5.2,  $T_0(x) = 1$ ,  $T_1(x) = x$ ,  $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ,  $T_3(x) = 4x^3 - 3x \dots$

Les polynômes de Chebyshev forment une famille orthogonale de l'espace de Hilbert  $L^2_\omega[-1, 1]$ , dont la mesure est  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$  c'est-à-dire que

$$\forall f, g \in L^2_\omega[-1, 1], \quad (f, g) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (5.11)$$

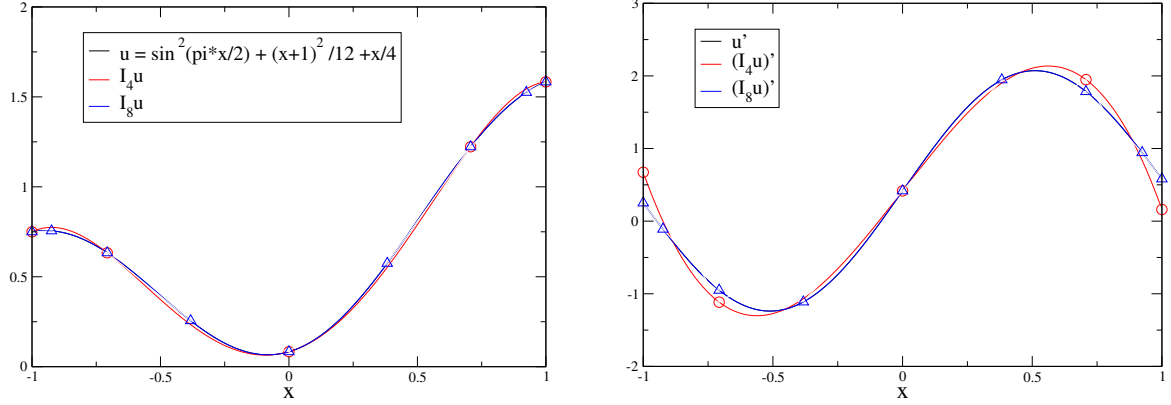


FIG. 5.1 – Interpolants  $I_N u$  et  $u$  pour  $N = 4$  et  $N = 8$  à gauche. Dérivée de l'interpolant  $I_N u$  et  $u'$  à droite pour  $N = 4$  et  $N = 8$  également. Les ronds et les triangles correspondent respectivement aux valeurs de l'interpolant aux points de collocation pour  $N = 4$  et  $N = 8$

Afin de déterminer l'interpolant  $I_N u$  d'une fonction  $u \in L^2_\omega[-1, 1]$ , on calcule les coefficients discrets  $\tilde{u}_n$ . On considère pour cela l'équation (5.6) en utilisant l'identité

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} (1 + \delta_{0n}) \delta_{mn}. \quad (5.12)$$

Si on utilise la quadrature de Gauss-Lobatto, les points de collocations sont donnés par

$$x_n = -\cos\left(\pi \frac{n}{N}\right) \quad \text{avec} \quad 0 \leq n \leq N. \quad (5.13)$$

et les poids valent

$$w_n = \frac{\pi}{2N} \quad \text{si} \quad n = 0 \text{ ou } n = N \quad (5.14)$$

$$w_n = \frac{\pi}{N} \quad \text{si} \quad 1 \leq n \leq N-1 \quad (5.15)$$

On peut montrer que pour toute fonction de classe  $C^m$ , les erreurs de troncature et d'interpolation sont bornées par

$$\|P_N u - u\|_\infty \leq \frac{C(1 + \ln N)}{N^m} \sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_\infty \quad (5.16)$$

$$\|I_N u - u\|_\infty \leq \frac{C}{N^{m-1/2}} \sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_\infty, \quad (5.17)$$

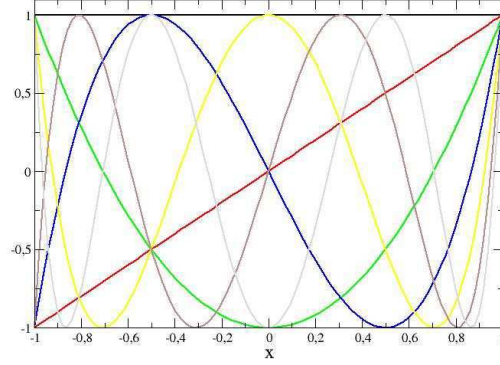


FIG. 5.2 – Les huit premiers polynômes de Chebyshev.

où  $\| \cdot \|_\infty$  est le maximum de la valeur absolue et  $C$  est une constante positive. En particulier, si  $u$  est  $C^\infty$  et les dérivées successives sont bornées (ce qui est généralement le cas pour des fonctions classiques) alors l'interpolant  $I_N u$  converge vers  $u$  plus vite que n'importe quelle puissance de  $N$ . L'erreur décroît donc exponentiellement en augmentant le nombre de polynômes  $N$  utilisés pour la décomposition. On dit que l'erreur est évanescente.

## 5.3 Équations différentielles

Considérons l'équation différentielle du second ordre et à une dimension suivante

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - 4 \frac{du}{dx} + 4u = e^x - \frac{4e}{1+e^2}, \quad x \in [-1, 1] \quad (5.18)$$

avec les conditions de bord de type Dirichlet

$$u(-1) = 0 \quad \text{et} \quad u(1) = 0. \quad (5.19)$$

La solution exacte du système d'équations (5.18) et (5.19) étant

$$u(x) = e^x - \frac{\sinh(1)}{\sinh(2)} e^{2x} - \frac{e}{1+e^2}. \quad (5.20)$$

Si  $u = \sum_{i=0}^N \tilde{u}_i T_i$  et  $H$  est l'opérateur  $(\frac{d^2}{dx^2} - 4 \frac{d}{dx} + 4Id)$  alors on peut écrire

$$H u = \sum_{i=0}^N \tilde{h}_i T_i \quad \text{avec} \quad \tilde{h}_i = \sum_{j=0}^N H_{ij} \tilde{u}_j \quad (5.21)$$

Les coefficients  $H_{ij}$  sont obtenus connaissant les opérations de base sur les polynômes  $T_n$ .

Prenons par exemple  $N = 4$ . En quadrature de Gauss-Lobatto, les points de collocations  $x_n$  sont donnés par  $\{x_n\} = \{-\cos(n\pi/4), 0 \leq n \leq 4\} = \{-1, -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 1\}$  et la matrice de l'opérateur  $H$  est

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -12 & 32 \\ 0 & 4 & -16 & 24 & -32 \\ 0 & 0 & 4 & -24 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Maintenant, pour résoudre le système d'équations (5.18) et (5.19) avec les bonnes conditions aux limites, trois méthodes différentes existent : la **méthode Tau**, la **méthode de Galerkin** et la **méthode de collocation**. Nous ne présenterons à travers cet exemple que la méthode Tau.

En notant  $S = e^x - 4e/(1 + e^2)$  la source et  $\tilde{s}_i$  les coefficients discrets de son interpolant  $I_N S$ , la solution du système est obtenue avec la méthode Tau en imposant que pour  $0 \leq i \leq N$ , on ait  $(T_i, Hu - S) = 0$ . La famille des polynômes de Chebyshev  $T_i$  étant orthogonale, cela implique

$$\sum_{j=0}^N H_{ij} \tilde{u}_j = \tilde{s}_i, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (5.23)$$

De plus, les conditions aux limites (5.19) résultent en deux équations supplémentaires

$$u(-1) = 0 \quad \implies \sum_{j=0}^N (-1)^j \tilde{u}_j = 0 \quad (5.24)$$

$$u(1) = 0 \quad \implies \sum_{j=0}^N \tilde{u}_j = 0 \quad (5.25)$$

où l'on a utilisé les propriétés des polynômes de Chebyshev  $T_n(-1) = (-1)^n$  et  $T_n(1) = 1$ . Nous obtenons donc  $N + 1$  équations pour le système (5.23) plus deux conditions de bord soit  $N + 3$  équations pour les  $N + 1$  inconnues  $\tilde{u}_i$ . On ne conserve alors que  $N - 1$  conditions d'orthogonalité avec les polynômes de Chebyshev, en relaxant les deux dernières, résultant en un système global de  $N + 1$  équations à  $N + 1$  inconnues.

Pour  $N = 4$ , le système final s'écrit

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 & -12 & 32 \\ 0 & 4 & -16 & 24 & -32 \\ 0 & 0 & 4 & -24 & 48 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_0 \\ \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

où les coefficients  $\tilde{s}_i$  sont connus. On obtient comme solution :  $\tilde{u}_0 \simeq 0.1456$ ,  $\tilde{u}_1 \simeq 0.0789$ ,  $\tilde{u}_2 \simeq -0.1220$ ,  $\tilde{u}_3 \simeq -0.0789$ ,  $\tilde{u}_4 \simeq -0.0236$ . Elle est représentée sur la figure 5.3 pour  $N = 4$  et  $N = 8$ , ne se distinguant plus de la solution exacte dans ce dernier cas. On trouve une erreur évanescence, qui décroît comme  $\exp(-N)$ , caractéristique des méthodes spectrales. La saturation observée à une précision d'environ  $10^{-15}$  est uniquement due à l'utilisation de la double

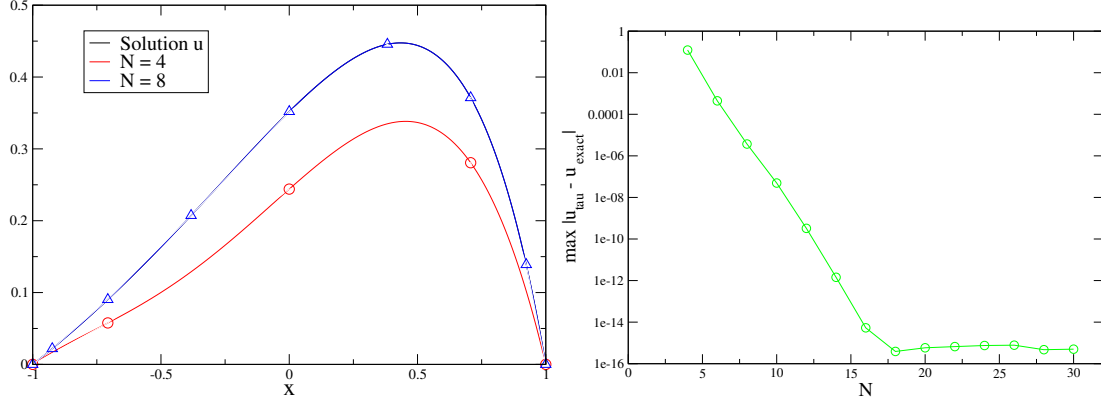


FIG. 5.3 – A gauche, solution exacte et solutions du système d'équations (5.18) et (5.19) obtenues avec la méthode Tau pour  $N = 4$  et  $N = 8$ . Les ronds et les triangles correspondent respectivement aux valeurs de l'interpolant aux points de collocations pour  $N = 4$  et  $N = 8$ . A droite, erreur maximum entre la solution numérique et la solution exacte pour différentes valeurs de  $N$ .

précision.

La méthode de Galerkin consiste à choisir une base de polynômes de décomposition, dite base de Galerkin, qui satisfait les conditions de bord. La base n'est alors plus nécessairement orthogonale. Les conditions aux limites sont alors immédiatement satisfaites et l'on passe de la base des polynômes de Chebyshev à la base de Galerkin par une matrice de transformation. Quand à la méthode de collocation, elle consiste à imposer que le système d'équations (5.18) est satisfait aux points de collocations internes, c'est-à-dire que  $(Hu - S)(x_i) = 0$  pour  $1 \leq i \leq N - 1$ . Et, comme pour la méthode Tau, on impose ensuite les deux conditions de bord résultant à nouveau à  $N + 1$  équations.

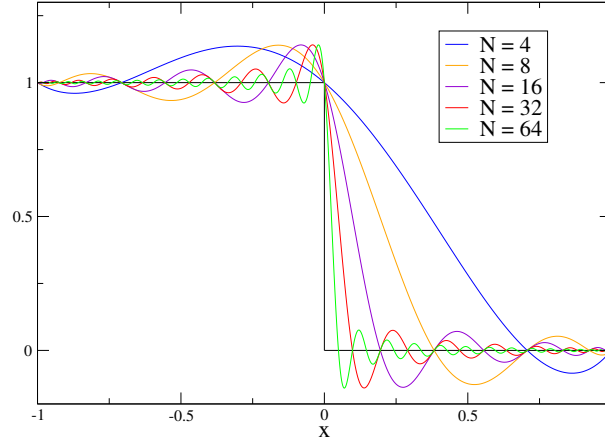
## 5.4 Décomposition multi-domaines

### 5.4.1 Phénomène de Gibbs

On vient de voir que les méthodes spectrales sont très efficaces pour décrire des fonctions, leurs dérivées ou résoudre des systèmes différentiels lorsque ces fonctions sont  $C^\infty$ . Cependant, pour des fonctions uniquement de classe  $C^k$ , la convergence n'est pas exponentielle mais uniquement en puissance de  $N$ , comme l'indique la formule (5.17). Et donc la convergence sera a fortiori encore moins bonne pour des fonctions discontinues telle que la fonction créneau  $u$  représentée sur la figure 5.4.

On remarque que l'interpolant  $I_N u$  sur les polynômes de Chebyshev ne converge pas uniformément sur la fonction créneau. L'amplitude des oscillations reste constante lorsqu'on aug-




 FIG. 5.4 – Représentation spectrale d’une fonction créneau pour  $N = 4, 8, 16, 32$  et  $64$ .

mente  $N$ . Cependant la fréquence de ces oscillations augmente et donc la surface entre l’interpolant et la fonction diminue avec le nombre de degrés de libertés. Les coefficients de la décomposition spectrale se comportent comme  $\tilde{u}_n \propto \frac{1}{N}$ . Cette lente décroissance implique que les coefficients  $\tilde{u}_n$  ont des valeurs non négligeables même pour de grandes valeurs de  $n$ . D’où l’apparition d’oscillations de plus en plus haute fréquence lorsque le nombre de coefficients augmente. C’est le *phénomène de Gibbs*. Il apparaît pour toutes fonctions discontinues mais également pour les fonctions uniquement  $C^1$ ,  $C^2$  et plus généralement mais dans une moindre mesure pour toutes fonctions non  $C^\infty$ .

Afin de retrouver une convergence plus rapide et donc une meilleure précision dans les calculs numériques, on évite au maximum ce phénomène de Gibbs. Pour cela, on décompose les intervalles d’étude en plusieurs domaines, la frontière du domaine se situant au niveau de la discontinuité physique. Pour la fonction créneau, par exemple, on peut prendre un domaine pour  $x \in [-1, 0]$  et un autre pour  $x \in [0, 1]$ . Cela permet de ne traiter que des fonctions  $C^\infty$  dans chaque domaine. Cette étude multi-domaines est notamment fondamentale pour notre étude sur les étoiles étranges, qui présentent une discontinuité de densité à leurs surfaces.

### 5.4.2 Approche multi-domaines

Dans certains problèmes physiques, on aura intérêt à diviser l’espace d’étude en plusieurs domaines. Supposons que l’on ait un problème uni-dimensionnel avec  $p$  domaines dont les frontières sont  $a_0, a_1, \dots, a_p$ . On souhaite résoudre le système d’équations

$$H u(x) = S^{(k)} \quad 1 \leq k \leq p \quad (5.27)$$

$$u(a_0) = a \quad \text{et} \quad u(a_p) = b \quad (5.28)$$

avec  $H$  un opérateur différentiel linéaire,  $S^{(k)}$  la source dans le  $k$ ème domaine et  $a, b$  deux constantes arbitraires. La première chose à faire est d’effectuer un changement de variable pour

#### 5.4. DÉCOMPOSITION MULTI-DOMAINES

---

ramener le domaine d'étude dans l'intervalle  $[-1, 1]$  pour chaque domaine. Le plus simple est de choisir

$$x_k(x) = \frac{(a_k - a_{k-1})}{2}x + \frac{(a_k + a_{k-1})}{2}, \quad x \in [a_{k-1}, a_k], \quad 1 \leq k \leq p. \quad (5.29)$$

Il existe encore une fois plusieurs méthodes pour résoudre ce genre de problème, notamment la *méthode Tau*, la *méthode des solutions homogènes* et la *méthode variationnelle*.

A l'instar du cas à un seul domaine, on souhaite, avec la méthode Tau, que  $Hu - S^{(k)}$  soit orthogonal à la famille des polynômes  $T_i$ , c'est-à-dire que  $(T_i, S^{(k)}) = 0$  pour tout  $i$  et  $k$ . Cela résulte dans le système d'équations suivant

$$\sum_{j=0}^N H_{ij}^{(k)} \tilde{u}_j^{(k)} = \tilde{s}_i^{(k)}, \quad 0 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq k \leq p, \quad (5.30)$$

où les  $\tilde{u}_i^{(k)}$  et  $\tilde{s}_i^{(k)}$  sont respectivement les coefficients de la solution et de la source dans le domaine  $k$ . On compte donc  $p(N + 1)$  inconnues, les  $\tilde{u}_i^{(k)}$ , et également  $p(N + 1)$  équations. Mais on doit encore imposer des conditions aux limites et de raccordement. On enlève donc, comme dans le cas à un seul domaine, les deux dernières équations de chaque domaine. Cela nous permet d'imposer les deux conditions de bord,  $p - 1$  conditions de raccord de la solution entre chaque domaine et enfin  $p - 1$  conditions de raccord de la dérivée de la solution entre chaque domaine. On compte donc à nouveau  $p(N - 1) + 2 + 2(p - 1) = p(N + 1)$  équations. Il ne reste plus qu'à inverser ce système d'équations pour obtenir les coefficients de la solution dans chaque domaine. La solution ainsi obtenue sera au moins  $C^1$  aux frontières entre chaque domaine.

On peut voir sur des exemples concrets que, même si la source est discontinue ou plus généralement uniquement  $C^k$  à certains points, si l'on choisit ces points comme frontières des domaines alors on retrouve une convergence exponentielle de la solution en augmentant  $N$ . L'erreur est donc évanescence alors qu'elle ne décroît typiquement que comme  $1/N^k$  avec un seul domaine d'étude si la source est  $C^k$ .

La méthode des solutions homogènes est la plus proche de la façon de résoudre analytiquement les équations différentielles linéaires et c'est aussi celle qu'on utilise dans le groupe pour résoudre les équations de Poisson qui apparaissent dans le problème des données initiales du formalisme 3+1 de la relativité générale. Son principe consiste à trouver la solution particulière et calculer les solutions homogènes dans chaque domaine, puis déterminer les "coefficients" des solutions homogènes en imposant les conditions limites et le raccord de la solution et sa (ses) dérivée(s) aux frontières des domaines. Les solutions homogènes sont généralement déterminées analytiquement mais peuvent aussi être calculées numériquement en résolvant le système  $Hu = 0$ . La solution particulière est calculée avec une variante de la méthode Tau, car les matrices  $H_{ij}^{(k)}$  sont alors dégénérées du fait de la présence des solutions homogènes. On se doit donc de jouer avec les lignes et les colonnes de la matrice pour la rendre non dégénérée puis l'inverser. Dans le cas d'un opérateur du second ordre, on a généralement deux solutions homogènes. La solution générale s'écrit alors  $u^{(k)}(x) = g^{(k)}(x_k) + \sum_{n=1}^2 \alpha_n^{(k)} h_n^{(k)}(x_k)$  en notant  $g^{(k)}$

la solution particulière,  $h_n^{(k)}$  les solutions homogènes. On détermine enfin les coefficients  $\alpha_n^{(k)}$  grâce aux conditions de bord et aux raccords de la solution et ses dérivées.

Quand à la méthode variationnelle, elle n'est applicable qu'avec les polynômes de Legendre car elle nécessite une mesure  $\omega(x) = 1$ . La solution est déterminée par la donnée des valeurs aux points de collocation et ne requiert le raccord que de la solution mais pas de ses dérivées aux frontières des domaines. La théorie associée à la formulation variationnelle est la plus développée et on peut montrer que la méthode est optimale. Cependant, utilisant les polynômes de Chebyshev, nous ne pouvons pas l'appliquer.

## 5.5 Problème à trois dimensions

### 5.5.1 Système de coordonnées

Dans les systèmes qui nous intéressent, les objets compacts, nous sommes bien entendus confrontés à des problèmes à trois dimensions. Étant donnée la topologie de ces objets, nous utilisons les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ . De plus, nous souhaitons que le domaine d'étude s'étende jusqu'à l'infini spatial, afin d'imposer des conditions limites externes "exactes", à savoir une métrique plate. Dans le cas de trous noirs, nous devons également être capables d'imposer des conditions de bord interne au niveau de l'horizon. Pour les étoiles à neutrons, les équations hydrodynamiques nécessitent des conditions à la surface de l'étoile. Pour ces raisons, il est judicieux de décomposer l'espace physique  $\mathbb{R}^3$  en différents domaines. Nous utilisons un noyau contenant l'origine,  $n$  coquilles ( $0 \leq n \leq \infty$ ) et un domaine compactifié qui s'étend jusqu'à l'infini spatial, comme l'illustre la figure 5.5.

Afin de permettre la décomposition des champs tensoriels sur les bases de décompositions choisies, valables sur des intervalles bien précis, il est nécessaire d'introduire des coordonnées numériques  $(\xi, \theta', \varphi')$  reliées aux coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$  par une relation dépendant du type de domaine. Quel que soit le problème et dans tous les domaines, la relation entre les coordonnées angulaires est

$$\theta' = \theta \quad \text{et} \quad \varphi' = \varphi \quad (5.31)$$

si bien qu'on peut dorénavant abandonner les primes sur ces variables. Par contre, la relation entre les coordonnées radiales dépend du type de domaine. Dans le cas de domaines à symétrie sphérique, nous choisissons :

- pour le noyau,  $0 \leq r \leq r_0$  :

$$r = \alpha_0 \xi, \quad \xi \in [0, 1], \quad \alpha_0 = r_0. \quad (5.32)$$

- pour la  $i$ ème coquille sphérique ( $1 \leq i \leq n$ ) de rayon  $r \in [r_{i-1}, r_i]$  :

$$r = \alpha_i \xi + \beta_i, \quad \xi \in [-1, 1], \quad \alpha_i = \frac{r_i - r_{i-1}}{2}, \quad \beta_i = \frac{r_i + r_{i-1}}{2}. \quad (5.33)$$

- pour le domaine compactifié,  $r_n \leq r \leq \infty$ , on effectue le changement de variable  $u = 1/r$  et ainsi :

$$u = \frac{1}{r} = \alpha_{n+1}(1 - \xi), \quad \xi \in [-1, 1], \quad \alpha_{n+1} = \frac{1}{2r_n}. \quad (5.34)$$

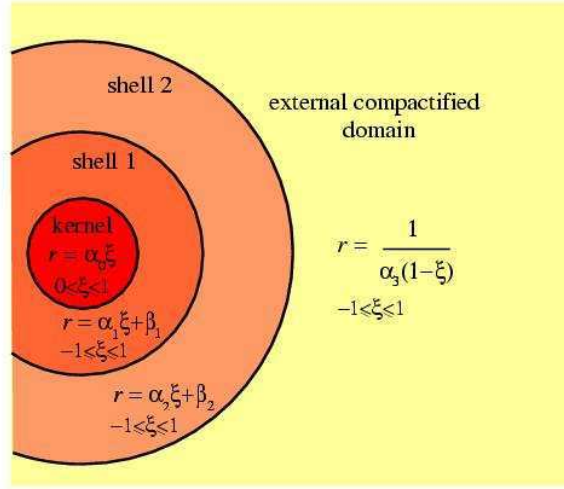


FIG. 5.5 – Décomposition de l'espace  $\mathbb{R}^3$  en différents domaines : un noyau, des coquilles et un domaine compactifié.

Cependant, dans le cas de système binaires d'étoiles à neutrons ou d'étoiles à neutrons en rotation, la surface n'est pas à symétrie sphérique et s'en éloigne d'autant plus que les binaires sont proches ou la rotation est rapide. Pourtant, il semble judicieux que la surface des étoiles corresponde à une frontière entre deux domaines. Et c'est même fondamental dans le cas des étoiles étranges, qui présentent une discontinuité de densité à leur surface. Si les domaines ne sont pas adaptées à la surface alors on sera confrontés au phénomène de Gibbs.

Pour permettre l'adaptation des domaines à ces surfaces, on modifie la relation entre les variables radiales, laissant inchangée l'équation (5.31). Pour le noyau et les coquilles on choisit

$$r = R_0(\xi, \theta, \varphi) \quad (5.35)$$

où  $R_0$  est une fonction sujette à des conditions de régularité (voir Bonazzola *et al.* [29]). Pour le noyau par exemple, si on souhaite que la surface externe coïncide avec une surface  $r = S(\theta, \phi)$ , on doit vérifier

$$r = R_0(1, \theta, \varphi) = S(\theta, \varphi), \quad (5.36)$$

$\xi$  valant un à la surface externe du noyau. On écrit d'une manière générale

$$R_0(\xi, \theta, \varphi) = \alpha_0 [\xi + A_0(\xi)F_0(\theta, \varphi) + B_0(\xi)G_0(\theta, \varphi)] \quad (5.37)$$

avec  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $F_0$  et  $G_0$  des fonctions explicitées dans Bonazzola *et al.* [29]. La condition (5.36) permettant de déterminer  $F_0$  et  $G_0$ , qui sont nulles dans le cas de domaines sphériques. La figure 5.6 donne une illustration de grilles adaptées aux surfaces des étoiles.

### 5.5.2 Bases de décomposition spectrale

Pour la variable radiale, nous avons déjà mentionné que nous utilisons les polynômes de Chebyshev dont les propriétés sont données dans la section 5.2. La décomposition spectrale est

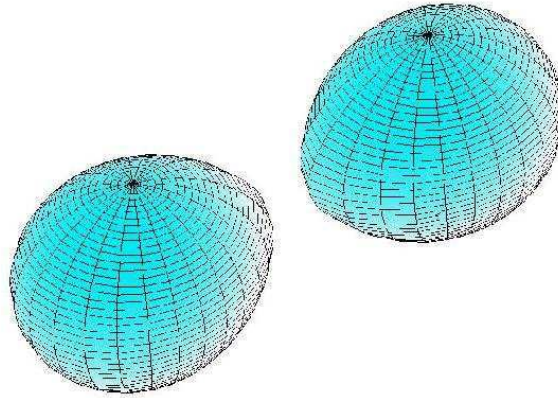


FIG. 5.6 – Décomposition double grilles et s'adaptant aux surfaces des étoiles.

effectuée par rapport à la variable  $\xi$ .

Quand aux variables angulaires  $\theta$  et  $\phi$ , le plus naturel est de décomposer sur les séries de Fourier. On peut montrer qu'avec cette base de décomposition, pour toute fonction  $u$  de classe  $C^k$ , il existe  $C \in \mathbb{R}^+$  tel que

$$\|u - I_N u\| \leq C \frac{\ln N}{N^k} \sum_{k=0}^m \|u^{(k)}\|_{\infty}. \quad (5.38)$$

On retrouve le fait que si  $u$  est  $C^\infty$  alors l'erreur est évanescence, tout comme avec les polynômes de Chebyshev.

## **Deuxième partie**

### **Résultats**



# Chapitre 6

## Last orbits of binary strange quark stars

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>6.2</b>	<b>Assumptions . . . . .</b>	<b>92</b>
<b>6.3</b>	<b>The equation of state and stellar models . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>6.4</b>	<b>Equations to be solved . . . . .</b>	<b>96</b>
6.4.1	The gravitational field equations . . . . .	96
6.4.2	The fluid equations . . . . .	97
6.4.3	Boundary condition for the velocity potential . . . . .	98
<b>6.5</b>	<b>Numerical results . . . . .</b>	<b>99</b>
6.5.1	The method . . . . .	99
6.5.2	Evolutionary sequences . . . . .	100
6.5.3	Corotating binaries . . . . .	100
6.5.4	Irrotational binaries . . . . .	101
<b>6.6</b>	<b>Summary and discussion . . . . .</b>	<b>104</b>

---



# Last orbits of binary strange quark stars

**François Limousin, Dorota Gondek-Rosinska and Eric Gourgoulhon**

Phys. Rev. D, **71**, 064012 (2005)

## ABSTRACT

We present the first relativistic calculations of the final phase of inspiral of a binary system consisting of two stars built predominantly of strange quark matter (strange quark stars). We study the precoalescing stage within the Isenberg-Wilson-Mathews approximation of general relativity using a multidomain spectral method. A hydrodynamical treatment is performed under the assumption that the flow is either rigidly rotating or irrotational, taking into account the finite density at the stellar surface — a distinctive feature with respect to the neutron star case. The gravitational-radiation driven evolution of the binary system is approximated by a sequence of quasi-equilibrium configurations at fixed baryon number and decreasing separation. We find that the innermost stable circular orbit (ISCO) is given by an orbital instability both for synchronized and irrotational systems. This contrasts with neutron stars for which the ISCO is given by the mass-shedding limit in the irrotational case. The gravitational wave frequency at the ISCO, which marks the end of the inspiral phase, is found to be  $\sim 1400$  Hz for two irrotational  $1.35 M_{\odot}$  strange stars and for the MIT bag model of strange matter with massless quarks and a bag constant  $B = 60 \text{ MeV fm}^{-3}$ . Detailed comparisons with binary neutrons star models, as well as with third order Post-Newtonian point-mass binaries are given.

## 6.1 Introduction

One of the most important prediction of general relativity is gravitational radiation. Coalescing neutron star binaries are considered among the strongest and most likely sources of gravitational waves to be seen by VIRGO/LIGO interferometers [19, 90]. Due to the emission of gravitational radiation, binary neutron stars decrease their orbital separation and finally merge. Gravitational waves emitted during the last few orbits of inspiral could yield important informations about the equation of state (EOS) of dense matter [18, 57, 110, 134]. With accurate templates of gravitational waves from coalescing binary compact stars, it may be possible to extract information about physics of neutron stars from signals observed by the interferometers and to solve one of the central but also most complex problem of physics — the problem of the absolute ground state of matter at high densities. It is still an open question whether the core of a neutron star consists mainly of superfluid neutrons or exotic matter like strange quark matter, pions or kaons condensates (see e.g. Ref. [79] for a recent review). The possibility of the existence of quark matter dates back to the early seventies. Bodmer [24] remarked that matter consisting of deconfined up, down and strange quarks could be the absolute ground state of matter at zero pressure and temperature. If this is true then objects made of such matter, the so-called *strange stars*, could exist [1, 80, 152]. Strange quark stars are currently considered as a possible alternative to neutron stars as compact objects (see e.g. [65, 100, 146] and references therein).

The evolution of a binary system of compact objects is entirely driven by gravitational radiation and can be roughly divided into three phases : point-like inspiral, hydrodynamical inspiral and merger. The first phase corresponds to large orbital separation (much larger than the neutron star radius) and can be treated analytically using the post-Newtonian (PN) approximation to general relativity (see Ref. [22] for a review). In the second phase the orbital separation becomes only a few times larger than the radius of the star, so the effects of tidal deformation, finite size and hydrodynamics play an important role. In this phase, since the shrinking time of the orbital radius due to the emission of gravitational waves is still larger than the orbital period, it is possible to approximate the state as quasi-equilibrium [14, 30]. The final phase of the evolution is the merger of the two objects, which occur dynamically [111, 125, 127, 128]. Note that quasi-equilibrium computations from the second phase provide valuable initial data for the merger [56, 110, 125, 127].

Almost all studies of the final phase of the inspiral of close binary neutron star systems employ a simplified EOS of dense matter, namely a polytropic EOS [30, 56, 57, 72, 101, 102, 132, 134, 139, 141]. There are only two exceptions : (i) Oechslin et al. have used a pure nuclear matter EOS, based on a relativistic mean field model and a ‘hybrid’ EOS with a phase transition to quark matter at high density [110] ; (ii) Bejger et al. have computed quasi-equilibrium sequences based on three nuclear matter EOS [18]. In this article we present results on the hydrodynamical phase of inspiraling binary strange quark stars described by MIT bag model. The calculations are performed in the framework of *Isenberg-Wilson-Mathews* approximation to general relativity (see Ref. [17] for a review). We consider binary systems consisting of two identical stars. We choose the gravitational mass of each star to be  $1.35 M_{\odot}$  in infinite separation in order to be consistent with recent population synthesis calculations [33] and with the

current set of well-measured neutron star masses in relativistic binary radio pulsars [35, 99]. We compare the evolution of a strange star binary system with a neutron star binary in order to find any characteristic features in the gravitational waveform that will help to distinguish between strange stars and neutron stars. We consider two limiting cases of velocity flow in stellar interior : the irrotational and the synchronized case in order to exhibit the differences between these two extreme states. The irrotational case is more realistic since the viscosity of neutron star matter (or strange star matter) is far too low to ensure synchronization during the late stage of the inspiral [20, 92]. Due to the finite density at the surface of bare strange stars, we had to introduce a treatment of the boundary condition for the velocity potential (in the irrotational case) different from that of neutron stars, where the density vanishes at the stellar surface.

The paper is organized in the following way : Sec. II is a brief summary of the assumptions upon which this work is based, Sec. III is devoted to the description of the EOS used to describe strange stars and neutron stars. In Sec. IV we briefly describe the basic equations for quasi-equilibrium and derive the boundary condition required for solving the fluid equation of irrotational flow with finite surface density, which is relevant for strange stars. In Sec. V we present the numerical results for corotating and irrotational strange stars binaries and compare their quasistationary evolution with that of neutron stars, as well as with that of post-Newtonian point-masses. Section VI contains the final discussion. Throughout the paper, we use geometrized units, for which  $G = c = 1$ , where  $G$  and  $c$  denote the gravitational constant and speed of light respectively.

## 6.2 Assumptions

The first assumption regards the matter stress-energy tensor  $T$ , which we assume to have the **perfect fluid** form :

$$T = (e + p)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{g}, \quad (6.1)$$

where  $e$ ,  $p$ ,  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{g}$  are respectively the fluid proper energy density, the fluid pressure, the fluid 4-velocity, and the spacetime metric. This is a very good approximation for neutron star matter or strange star matter.

The last orbits of inspiraling binary compact stars can be studied in the **quasi-equilibrium** approximation. Under this assumption the evolution of a system is approximated by a sequence of exactly circular orbits. This assumption results from the fact that the time evolution of an orbit is still much larger than the orbital period and that the gravitational radiation circularizes an orbit of a binary system. This implies a continuous spacetime symmetry, called *helical symmetry* [28, 60] represented by the Killing vector :

$$\ell = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (6.2)$$

where  $\Omega$  is the orbital angular velocity and  $\partial/\partial t$  and  $\partial/\partial \varphi$  are the natural frame vectors associated with the time coordinate  $t$  and the azimuthal coordinate  $\varphi$  of an asymptotic inertial observer.

### 6.3. THE EQUATION OF STATE AND STELLAR MODELS

---

One can then introduce the *shift vector*  $\mathbf{B}$  of co-orbiting coordinates by means of the orthogonal decomposition of  $\ell$  with respect to the  $\Sigma_t$  foliation of the standard 3+1 formalism :

$$\ell = N \mathbf{n} - \mathbf{B}, \quad (6.3)$$

where  $\mathbf{n}$  is the unit future directed vector normal to  $\Sigma_t$ ,  $N$  is called the *lapse function* and  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

We also assume that the spatial part of the metric (i.e. the metric induced by  $g$  on each hypersurface  $\Sigma_t$ ) is conformally flat, which corresponds to the **Isenberg-Wilson-Mathews** (IWM) approximation to general relativity [87, 88, 149] (see Ref. [60] for a discussion). Thanks to this approximation we have to solve only five of the ten Einstein equations. In the IWM approximation, the spacetime metric takes the form :

$$ds^2 = -(N^2 - B_i B^i) dt^2 - 2B_i dt dx^i + A^2 f_{ij} dx^i dx^j, \quad (6.4)$$

where  $A$  is some conformal factor,  $f_{ij}$  the flat spatial metric and Latin indices run in  $\{1, 2, 3\}$  (spatial indices). The comparison between the IWM results presented here and the non-conformally flat ones will be performed in a future article [140].

The fourth assumption concerns the fluid motion inside each star. We consider two limiting cases : **synchronized** (also called corotating) motion and **irrotational** flow (assuming that the fluid has zero vorticity in the inertial frame). The latter state is more realistic.

We consider only **equal-mass** binaries consisting of identical stars with gravitational masses  $M_1 = M_2 = 1.35 M_\odot$  measured in infinite separation. The main reason for choosing these particular masses is that five out of six observed binary radio pulsars have mass ratio close to unity and gravitational masses of each star  $\sim 1.3 - 1.4 M_\odot$  [35, 99]. In addition population synthesis calculations [33] have shown that a significant fraction of the observed binary neutron stars in gravitational waves will contain stars with equal masses  $\sim 1.4 M_\odot$  and systems consisting of a low and a high mass neutron star.

## 6.3 The equation of state and stellar models

It has been shown [57, 134] that the evolution of equal-mass binary neutron stars depend mainly on the compactness parameter  $M/R$ , where  $M$  and  $R$  are the gravitational mass measured by an observer at infinity for a single isolated neutron star and the stellar radius respectively. It is therefore interesting to check if the properties of inspiraling strange stars can be predicted by studying binaries consisting of polytropic neutron stars having the same mass and the same compactness parameter. Therefore we perform calculations for two different equations of state of dense matter : a strange quark matter EOS and a polytropic EOS.

Typically, strange stars are modeled [1, 80] with an equation of state based on the MIT-bag model of quark matter, in which quark confinement is described by an energy term proportional to the volume [58]. The equation of state is given by the simple formula

$$p = a(\rho - \rho_0), \quad (6.5)$$

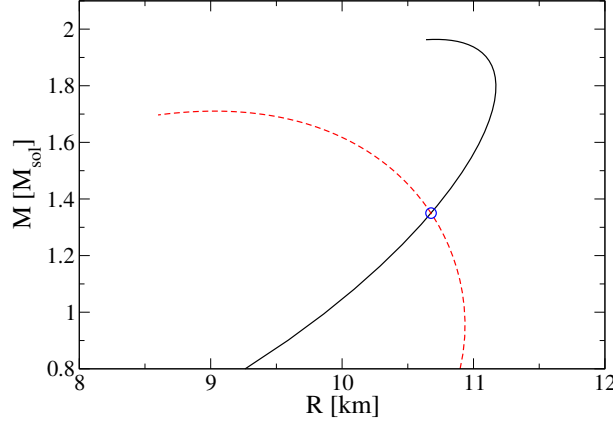


FIG. 6.1 – Gravitational mass  $M$  versus areal radius  $R$  for sequences of static strange quark stars described by the simplest MIT bag model (solid line) and neutron stars described by polytropic EOS with  $\gamma = 2.5$  and  $\kappa = 0.0093 m_0 n_{\text{nuc}}^{1.5}$  (dashed line). The two sequences are crossing at the point  $M = 1.35 M_\odot$  and  $R = 10.677$  km (marked by a circle).

$$n(p) = n_0 \cdot \left[ 1 + \frac{1+a}{a} \frac{p}{\rho_0} \right]^{1/(1+a)}, \quad (6.6)$$

where  $n$  is the baryon density and  $a$ ,  $\rho_0$ ,  $n_0$  are some constants depending on the 3 parameters of the model (the bag constant  $B$ , the mass of the strange quarks  $m_s$  and the strength of the QCD coupling constant  $\alpha$ ). In general this equation corresponds to a self-bound matter with mass density  $\rho_0$  and baryon density  $n_0$  at zero pressure and with a fixed sound velocity ( $\sqrt{a}$ ) at all pressures. It was shown that different strange quark models can be approximated very well by Eqs (6.5) and (7.2) [64, 160].

In the numerical calculations reported in the present paper we describe strange quark matter using the simplest MIT bag model (with massless and non-interacting quarks), for which the formula (6.5) is exact. We choose the value of the bag constant to be  $B = 60 \text{ MeV fm}^{-3}$ . For this model we have  $a = 1/3$ ,  $\rho_0 = 4.2785 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  and  $n_0 = 0.28665 \text{ fm}^{-3}$ . In general for the MIT bag model the density of strange quark matter at zero pressure is in the range  $\sim 3 \times 10^{14} - 6.5 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  and  $a$  between 0.289 and 1/3 (for  $0 \leq \alpha \leq 0.6$  and  $0 \leq m_s \leq 250 \text{ MeV}$ ) [160]. The higher value of  $a$  and of  $\rho_0$  the higher compactness parameter of a star with fixed gravitational mass.

Up to now, the majority of calculations of the hydrodynamical inspiral phase [30, 56, 57, 72, 101, 102, 132, 134, 139, 141] and all calculations of the merger phase [111, 125, 127, 128] have been performed for binary systems containing neutron stars described by a polytropic EOS :

$$p = \kappa n^\gamma, \quad (6.7)$$

where  $\kappa$  and  $\gamma$  coefficients are some constant numbers :  $\kappa$  represents the overall compressibility of matter while  $\gamma$  measures the stiffness of the EOS. The total energy density is related to the

### 6.3. THE EQUATION OF STATE AND STELLAR MODELS

baryon density by

$$e(n) = \frac{\kappa}{\gamma - 1} n^\gamma + \mu_0 n, \quad (6.8)$$

where  $\mu_0$  is the chemical potential at zero pressure.

In order to compare results for strange stars with those for neutron stars, we determine the values of  $\kappa$  and  $\gamma$  which yield to the same radius for the gravitational mass  $M = 1.35 M_\odot$  as that obtained for a static strange star. It was shown [18] that the properties of inspiraling neutron stars described by realistic EOS can be, in a good approximation, predicted by studying binaries with assumed polytropic EOSs with  $\gamma = 2$  or 2.5. For a  $1.35 M_\odot$  strange star we have a high value of compactness parameter  $M/R = 0.1867$  so we have chosen  $\gamma = 2.5$ , for which we found  $\kappa = 0.00937 m_0 n_{\text{nuc}}^{1.5}$ , with the rest mass of relativistic particles  $m_0 := 1.66 \times 10^{-27}$  kg and  $n_{\text{nuc}} = 0.1 \text{ fm}^{-3}$ .

In Fig. 6.1 we present the mass-radius relation for a sequence of static stars described by the simplest MIT bag model (solid line) and the polytropic EOS (dashed line) parametrized by central density. For small mass strange stars  $M \sim R^3$  since density is almost constant inside a star  $\sim \rho_0$ . In the left panel of Fig. 6.2 we show the mass density distribution inside the strange star (solid line) and the neutron star described by polytropic EOS (dashed line) having gravitational mass  $1.35 M_\odot$  and areal radius 10.667 km (the configurations corresponding to the crossing point on Fig. 6.1). The huge density jump at the surface of the strange star corresponds to  $\rho_0 = 4B$ . The value of density at the surface describes strongly or weakly bound strange matter, which in each case must be absolutely stable with respect to  $^{56}\text{Fe}$ .

An important quantity relevant for evolution of binary compact stars is the adiabatic index :

$$\gamma = d \ln p / d \ln n. \quad (6.9)$$

We assume that matter is catalized so the adiabatic index can be calculated directly from EOS (see Refs. [73] and [66] for discussion on different kind of adiabatic indices and corresponding timescales). Note that for the polytropic EOS given by Eq. (6.7) the index  $\gamma$  coincides with the adiabatic index of a relativistic isentropic fluid. Dependence of the adiabatic index  $\gamma$  on stellar radii for both EOS is shown in the right pannel of Fig. 6.2. The adiabatic index of strange matter is qualitatively different from the adiabatic index for polytropic EOS or for realistic EOS. The values of  $\gamma$  in the outer layers of strange stars are very large and for  $\rho \rightarrow \rho_0$  we have  $\gamma = a + \rho/(\rho - \rho_0) \rightarrow \infty$ . The EOS of neutron stars for densities lower than  $\sim 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  (the crust) is well established [79]. In the outer crust of an ordinary neutron star the pressure is dominated by the ultra-relativistic electron gas, so we have  $\gamma = 4/3$ . The values of the local adiabatic index in the inner crust of a neutron star depends strongly on density and varies from  $\gamma \simeq 0.5$  near the neutron drip point to  $\gamma \simeq 1.6$  in the bottom layers near the crust-core interface.

In our calculations we use equation of state in the form :

$$n = n(H), \quad e = e(H), \quad p = p(H), \quad (6.10)$$

where  $H$  is pseudo-enthalpy (the log-enthalpy) defined by :

$$H(n) := \ln \left( \frac{e + p}{n E_0} \right), \quad (6.11)$$

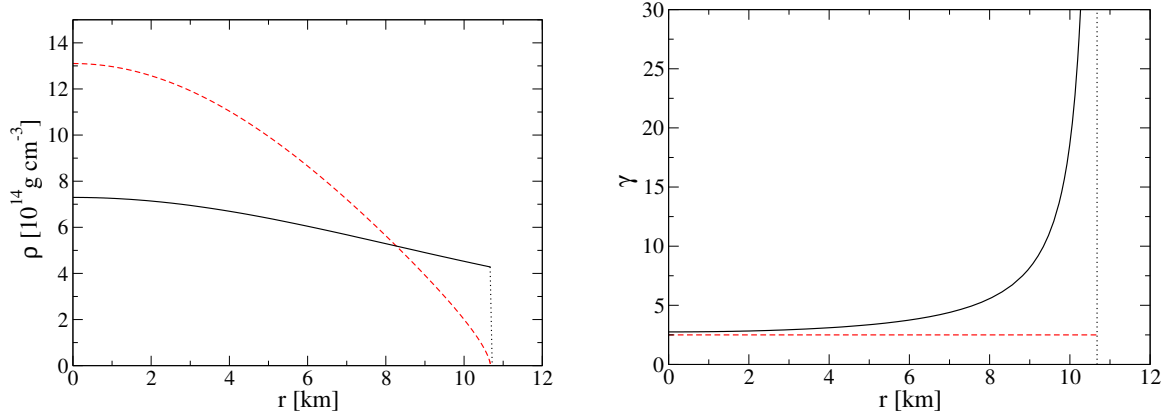


FIG. 6.2 – Mass density (left panel) and the adiabatic index  $\gamma$  (right panel) versus the radial coordinate  $r$  for a static strange quark star (solid line) and a polytropic neutron star (dashed line), having both a gravitational mass of  $1.35 M_{\odot}$  and an areal radius  $R = 10.677$  km (resulting in the compactness parameter  $M/R = 0.1867$ ). The vertical dotted line corresponds to the stellar surface.

where the energy per unit baryon number is  $E_0 = m_0$  for a polytropic EOS, and  $E_0 = \rho_0/n_0 = 837.26$  MeV for strange quark model described above. For our model of strange quark matter we have :

$$\rho = \rho_0(3e^{4H} + 1)/4, \quad p = \rho_0(e^{4H} - 1)/4, \quad n = n_0 e^{3H} \quad (6.12)$$

## 6.4 Equations to be solved

We refer the reader to Ref. [72] for the derivation of the equations describing quasi-equilibrium binary stars within the IWM approximation to general relativity. After recalling these equations, we mainly concentrate on the equation for the velocity potential of irrotational flows. Actually this equation has a different structure for strange stars than for neutron stars. This results from the non-vanishing of the density at the stellar surfaces of strange stars (cf. the left panel in Fig. 6.2).

### 6.4.1 The gravitational field equations

The gravitational field equations have been obtained within the 3+1 decomposition of the Einstein's equations [39, 158], taking into account the helical symmetry of spacetime. The trace of the spatial part of the Einstein equations combined with the Hamiltonian constraint results in

## 6.4. EQUATIONS TO BE SOLVED

---

two equations :

$$\underline{\Delta}\nu = 4\pi A^2(E + S) + A^2 K_{ij} K^{ij} - \bar{\nabla}_i \nu \bar{\nabla}^i \beta, \quad (6.13)$$

$$\underline{\Delta}\beta = 4\pi A^2 S + \frac{3}{4} A^2 K_{ij} K^{ij} - \frac{1}{2} \left( \bar{\nabla}_i \nu \bar{\nabla}^i \nu + \bar{\nabla}_i \beta \bar{\nabla}^i \beta \right), \quad (6.14)$$

where  $\bar{\nabla}_i$  stands for the covariant derivative associated with the flat 3-metric  $f_{ij}$  and  $\underline{\Delta} := \bar{\nabla}^i \bar{\nabla}_i$  for the associated Laplacian operator. The quantities  $\nu$  and  $\beta$  are defined by  $\nu := \ln N$  and  $\beta := \ln(AN)$ , and  $K_{ij}$  denotes the extrinsic curvature tensor of the  $t = \text{const}$  hypersurfaces.  $E$  and  $S$  are respectively the matter energy density and the trace of the stress tensor, both as measured by the observer whose 4-velocity is  $n^\mu$  (*Eulerian observer*) :

$$E := T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \quad (6.15)$$

$$S := A^2 f^{ij} T_{ij}. \quad (6.16)$$

In addition, we have also to solve the momentum constraint, which writes

$$\underline{\Delta}N^i + \frac{1}{3} \bar{\nabla}^i (\bar{\nabla}_j N^j) = -16\pi N A^2 (E + p) U^i + 2N A^2 K^{ij} \bar{\nabla}_j (3\beta - 4\nu), \quad (6.17)$$

where  $N^i := B^i + \Omega(\partial/\partial\varphi)^i$  denotes the shift vector of nonrotating coordinates, and  $U^i$  is the fluid 3-velocity.

### 6.4.2 The fluid equations

Apart from the gravitational field equations, we have to solve the fluid equations. The equations governing the quasi-equilibrium state are the relativistic Euler equation and the equation of baryon number conservation. Both cases of irrotational and synchronized motions admit a first integral of the relativistic Euler equation :

$$H + \nu - \ln \Gamma_0 + \ln \Gamma = \text{const.}, \quad (6.18)$$

where  $\Gamma_0$  is the Lorentz factor between the co-orbiting observer and the Eulerian observer and  $\Gamma$  is the Lorentz factor between the fluid and the co-orbiting observers ( $\Gamma = 1$  for synchronized binaries).

For a synchronized motion, the equation of baryon number conservation is trivially satisfied, whereas for an irrotational flow, it is written as

$$\zeta H \underline{\Delta}\Psi + \bar{\nabla}^i H \bar{\nabla}_i \Psi = A^2 h \Gamma_n U_0^i \bar{\nabla}_i H + \zeta H \times \left[ \bar{\nabla}^i \Psi \bar{\nabla}_i (H - \beta) + A^2 h U_0^i \bar{\nabla}_i \Gamma_n \right], \quad (6.19)$$

where  $\Psi$  is the velocity potential,  $h := \exp(H)$ ,  $\zeta$  the thermodynamical coefficient :

$$\zeta := \frac{d \ln H}{d \ln n}, \quad (6.20)$$



and  $\Gamma_n$  denotes the Lorentz factor between the fluid and the Eulerian observer and  $U_0^i$  is the orbital 3-velocity with respect to the Eulerian observers :

$$U_0^i = -\frac{B^i}{N}. \quad (6.21)$$

The fluid 3-velocity  $U^i$  with respect to the Eulerian observer is equal to  $U_0^i$  for synchronized binary systems, whereas

$$U^i = \frac{1}{A^2 \Gamma_n h} \bar{\nabla}^i \Psi \quad (6.22)$$

for irrotational ones.

### 6.4.3 Boundary condition for the velocity potential

The method of solving the elliptic equation (6.19) for the velocity potential is different for neutron stars and strange stars. In the case of neutron stars, the coefficient  $\zeta H$  in front of the Laplacian vanishes at the surface of the star so Eq. (6.19) is not merely a Poisson type equation for  $\Psi$ . It therefore deserves a special treatment (see Appendix B in [72] for a discussion). In the case of strange stars, the coefficient  $\zeta H = 1/3$  in whole star so we have to deal with a usual Poisson equation and consequently we have to impose a boundary condition for the velocity potential at the stellar surface.

We can define the surface of the star by  $n|_{\text{surf}} = n_0 = \text{constant}$ . The surface of the fluid ball is obviously Lie-dragged along the fluid 4-velocity vector  $\mathbf{u}$ , so that this last condition gives

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{u}} n)|_{\text{surf}} = 0, \quad (6.23)$$

where  $\mathcal{L}_{\mathbf{u}}$  is the Lie derivative along the vector field  $\mathbf{u}$ . Let us decompose  $\mathbf{u}$  in a part along the helical Killing vector  $\ell$  and a part  $\mathbf{S}$  parallel to the hypersurface  $\Sigma_t$  :

$$\mathbf{u} = \lambda(\ell + \mathbf{S}). \quad (6.24)$$

The condition (6.23) is then equivalent to

$$\lambda(\mathcal{L}_{\ell} n + \mathcal{L}_{\mathbf{S}} n)|_{\text{surf}} = 0. \quad (6.25)$$

Now, if the fluid flows obeys to the helical symmetry  $\mathcal{L}_{\ell} n = 0$ ; inserting this relation into Eq. (6.25) leads to  $(\mathcal{L}_{\mathbf{S}} n)|_{\text{surf}} = 0$  or equivalently (since  $\mathbf{S}$  is a spatial vector) :

$$(S^i \bar{\nabla}_i n)|_{\text{surf}} = 0. \quad (6.26)$$

Now, let us express  $\mathbf{S}$  in terms of the spatial vectors  $\mathbf{U}$  and  $\mathbf{B}$ . First, Eq. (6.24) implies  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{n} \cdot \ell$ . Secondly, the fluid motion  $\mathbf{u}$  can be described by the orthogonal decomposition  $\mathbf{u} = \Gamma_n(\mathbf{n} + \mathbf{U})$  which yields  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = -\Gamma_n$ . Finally, from Eq. (6.3), we have  $\mathbf{n} \cdot \ell = -N$  so that the factor  $\lambda$  can be expressed as  $\lambda = \Gamma_n/N$  and Eq. (6.24) becomes

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma_n}{N}(\ell + \mathbf{S}). \quad (6.27)$$

## 6.5. NUMERICAL RESULTS

---

Now, combining Eq. (6.27) and Eq. (6.3), we have

$$\mathbf{u} = \Gamma_n \left[ \mathbf{n} + \frac{1}{N}(\mathbf{S} - \mathbf{B}) \right]. \quad (6.28)$$

Comparing with the orthogonal decomposition  $\mathbf{u} = \Gamma_n(\mathbf{n} + \mathbf{U})$ , we deduce that  $\mathbf{S} = N\mathbf{U} + \mathbf{B}$ . Inserting this relation into Eq. (6.26) leads to the boundary condition

$$(NU^i \bar{\nabla}_i n + B^i \bar{\nabla}_i n)|_{\text{surf}} = 0. \quad (6.29)$$

Now, using Eq. (6.22), we obtain a Neumann-like boundary condition for  $\Psi$  :

$$\left( \bar{\nabla}^i n \bar{\nabla}_i \Psi \right)|_{\text{surf}} = - \left( \frac{\Gamma_n h A^2}{N} B^i \bar{\nabla}_i n \right)|_{\text{surf}}. \quad (6.30)$$

Considering the elliptic equation (6.19) for  $\Psi$  we see that the boundary condition we have obtained is consistent with the case  $n = 0$  (or equivalently  $\zeta H = 0$ ) at the stellar surface since, from Eq. (6.20),  $\bar{\nabla}^i H = \frac{\zeta H}{n} \bar{\nabla}^i n$ .

## 6.5 Numerical results

### 6.5.1 The method

The resolution of the above nonlinear elliptic equations is performed thanks to a numerical code based on multidomain spectral methods and constructed upon the LORENE C++ library [98]. The detailed description of the whole algorithm, as well as numerous tests of the code can be found in [72]. Additional tests have been presented in Sec. 3 of [134]. The code has already been used successfully for calculating the final phase of inspiral of binary neutron stars described by polytropic EOS [30, 132–135] and realistic EOS [18]. It is worth to stress that the adaptation of the domains (numerical grids) to the stellar surface (surface-fitted coordinates) used in this code is particularly useful here, due to the strong discontinuity of the density field at the surface of strange stars (cf. the left panel in Fig. 6.2). Adapting the grids to the stellar surface allows to avoid the severe Gibbs phenomenon that such a discontinuity would necessarily generate when performing polynomial expansions of the fields [29].

The hydrodynamical part of the code has been amended for the present purpose, namely to solve Eq. (6.19) for the velocity potential  $\Psi$  subject to the boundary condition (6.30). Let us recall that in the original version of the code, the treatment of Eq. (6.19) was different due to the vanishing of the density field at the stellar surface (see Appendix B of Ref. [72]).

We have used one numerical domain for each star and 3 (resp. 4) domains for the space around them for a small (resp. large) separation. In each domain, the number of collocation points of the spectral method is chosen to be  $N_r \times N_\theta \times N_\varphi = 25 \times 17 \times 16$ , where  $N_r$ ,  $N_\theta$ , and  $N_\varphi$  denote the number of collocation points (= number of polynomials used in the spectral method) in the radial, polar, and azimuthal directions respectively. The accuracy of the computed relativistic models has been estimated using a relativistic generalization of the virial theorem [60] (see also Sec. III.A of Ref. [134]). The virial relative error is a few times  $10^{-5}$  for the closest configurations.

### 6.5.2 Evolutionary sequences

For each EOS we construct an *evolutionary sequence*, i.e. a sequence of quasi-equilibrium configurations with fixed baryon mass and decreasing separation. Such a sequence is expected to approximate pretty well the true evolution of binary neutron stars, which is entirely driven by the reaction to gravitational radiation and hence occur at fixed baryon number and fluid circulation.

For a given rotational state we calculate evolutionary sequences of binary system composed of two identical neutron stars or two identical strange stars. The evolution of inspiraling corotating (irrotational) binaries is shown in Fig. 6.3 (Fig. 6.4). Fig. 6.3 and upper panel of Fig. 6.4 show the binding energy  $E_{\text{bind}}$  versus frequency of gravitational waves  $f_{\text{GW}}$  and lower panel of Fig. 6.4 show the total angular momentum of the systems as a function of  $f_{\text{GW}}$ . The binding energy is defined as the difference between the actual ADM mass of the system,  $M_{\text{ADM}}$ , and the ADM mass at infinite separation ( $2.7 M_{\odot}$  in our case). The frequency of gravitational waves is twice the orbital frequency, since it corresponds to the frequency of the dominant part  $l = 2$ ,  $m = \pm 2$ . Solid and dashed lines denote quasi-equilibrium sequences of strange quark stars binaries and neutron stars binaries respectively. Dotted lines in Fig. 6.3 and Fig. 6.4 correspond to the 3rd PN approximation for point masses derived by [21]. Finally in Fig. 6.7 we compare our results with third order post-Newtonian results for point-mass particles obtained in the effective one body approach by Damour et al. 2000 [51], Damour et al. 2002 [50] and in the standard nonresummed post-Newtonian framework by Blanchet 2002 [21].

A turning point of  $E_{\text{bind}}$  along an evolutionary sequence indicates an orbital instability [60]. This instability originates both from relativistic effects (the well-known  $r = 6M$  last stable orbit of Schwarzschild metric) and hydrodynamical effects (for instance, such an instability exists for sufficiently stiff EOS in the Newtonian regime, see e.g. [135] and references therein). It is secular for synchronized systems and dynamical for irrotational ones.

In the case where no turning point of  $E_{\text{bind}}$  occurs along the sequence, the mass-shedding limit (Roche lobe overflow) marks the end of the inspiral phase of the binary system, since recent dynamical calculations for  $\gamma = 2$  polytrope have shown that the time to coalescence was shorter than one orbital period for configurations at the mass-shedding limit [101, 128]. Thus the physical inspiral of binary compact stars terminates by either the orbital instability (turning point of  $E_{\text{bind}}$ ) or the mass-shedding limit. In both cases, this defines the *innermost stable circular orbit (ISCO)*. The orbital frequency at the ISCO is a potentially observable parameter by the gravitational wave detectors, and thus a very interesting quantity.

### 6.5.3 Corotating binaries

Quasi-equilibrium sequences of equal mass corotating binary neutron stars and strange stars are presented in Fig. 6.3. For both sequences we find a minimum of the binding energy. In the present rotation state, this locates a secular instability [60]. The important difference between neutron stars and strange stars is the frequency at which this instability appears. Indeed, there is a difference of more than 100 Hz : 1020 Hz for strange stars and 1140 Hz for neutron stars. The binding energy is the total energy of gravitational waves emitted by the system : a corota-

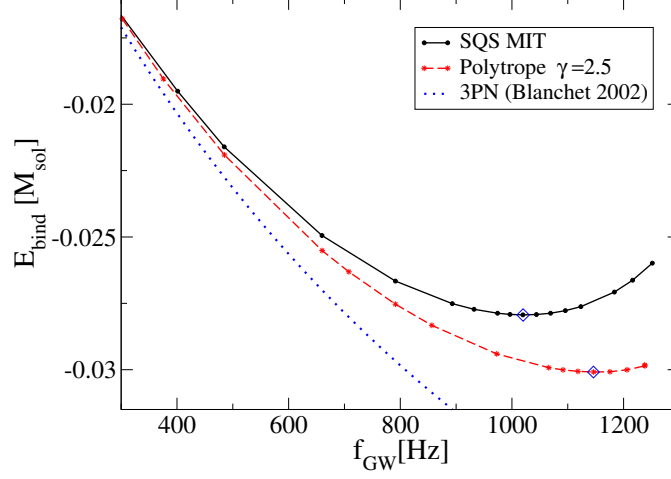


FIG. 6.3 – Binding energy as a function of gravitational wave frequency along evolutionary sequences of corotating binaries. The solid line denotes strange quark stars, the dashed one neutron stars with polytropic EOS, and the dotted one point-mass binaries in the 3PN approximation [21]. The diamonds locate the minimum of the curves, corresponding to the innermost stable circular orbit ; configurations to the right of the diamond are securely unstable.

ting binary strange star system emits less energy in gravitational waves and loses less angular momentum before the ISCO than a binary neutron star one with the same mass and compaction parameter in infinite separation.

Comparison of our numerical results with 3rd order PN calculations reveals a good agreement for small frequencies (large separations) (see Fig. 6.3 and 6.7). The deviation from PN curves at higher frequencies (smaller separation) is due to hydrodynamical effects, which are not taken into account in the PN approach.

#### 6.5.4 Irrotational binaries

In Fig. 6.4 we present the evolution of the binding energy and angular momentum for irrotational sequences of binary neutron stars and strange stars. We also verify that these sequences are in a good agreement with PN calculations for large separations.

We note important differences in the evolution of binary systems consisting of strange stars or neutron stars. The strange star sequence shows a minimum of the binding energy at  $f_{\text{GW}} \simeq 1390$  Hz, which locates a dynamical instability [60] and thus defines the ISCO. The minimum of  $E_{\text{bind}}$  coincides with the minimum of total angular momentum  $J$ . This is in accordance with the “first law of binary relativistic star thermodynamics” within the IWM approximation as derived by Friedman, Uryu and Shibata [60] and which states that, along an evolutionary sequence,

$$\delta M_{\text{ADM}} = \Omega \delta J. \quad (6.31)$$

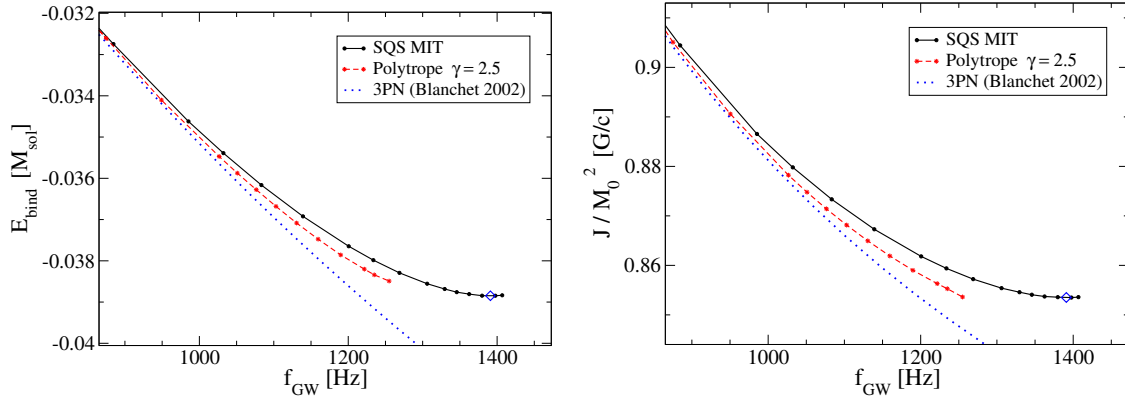


FIG. 6.4 – Binding energy (left panel) and angular momentum (right panel) as a function of gravitational wave frequency along evolutionary sequences of irrotational binaries. The solid line denotes strange quark stars, the dashed one polytropic neutron stars, and the dotted one point-mass binaries in the 3PN approximation [21]. The diamonds correspond to dynamical orbital instability (the ISCO).

The surface of strange stars at the ISCO is smooth (see Fig. 6.5). On the contrary the neutron star sequence does not present any turning point of  $E_{\text{bind}}$ , so that the ISCO in this case corresponds to the mass-shedding limit (final point on the dashed curves in Fig. 6.4). The gravitational wave frequency at the ISCO is much lower for neutron star binaries than for strange star binaries.

As already mentioned the adiabatic index in the outer layers of a compact star in a binary system plays a crucial role in its evolution, especially in setting the mass-shedding limit. Although the crust of a  $1.35 M_{\odot}$  neutron star contains only a few percent of the stellar mass, this region is easily deformed under the action of the tidal forces resulting from the gravitational field produced by the companion star. The end of inspiral phase of binary stars strongly depends on the stiffness of matter in this region. It has been shown that the turning-point orbital instability for irrotational polytropic neutron stars binaries can be found only if  $\gamma \geq 2.5$  and if the compaction parameter is smaller than certain value ([134], [141]). In fact, as shown in Fig. 31 of paper [134], they didn't find ISCO for irrotational binary neutron stars with  $\gamma = 2.5$  or  $\gamma = 3$  for compaction parameter as high as  $M/R = 0.187$ .

In Fig. 6.6 we present the evolution of two different stellar radii : the *equatorial radius*  $R_x$ , defined as half the diameter in the direction of the companion and the *polar radius*, defined as half the diameter parallel to the rotation axis. For spherical stars  $R_x = R_z$ . We see that at the end of the inspiral phase, neutron stars are, for the same separation, more oblate (more deformed) than strange stars. Binary neutron stars reach the mass-shedding limit (the point at which they start to exchange matter - a cusp form at the stellar surface in the direction of the companion) at coordinate separation  $d \sim 25\text{km}$ . We don't see any cusps for strange stars even for distances slightly smaller than the distance corresponding to the ISCO  $\sim 23.5\text{ km}$ .

It is worth to remind here the results on rapidly rotating strange stars and neutron stars. The Keplerian limit is obtained for higher oblateness (more deformed stars), measured for example

## 6.5. NUMERICAL RESULTS

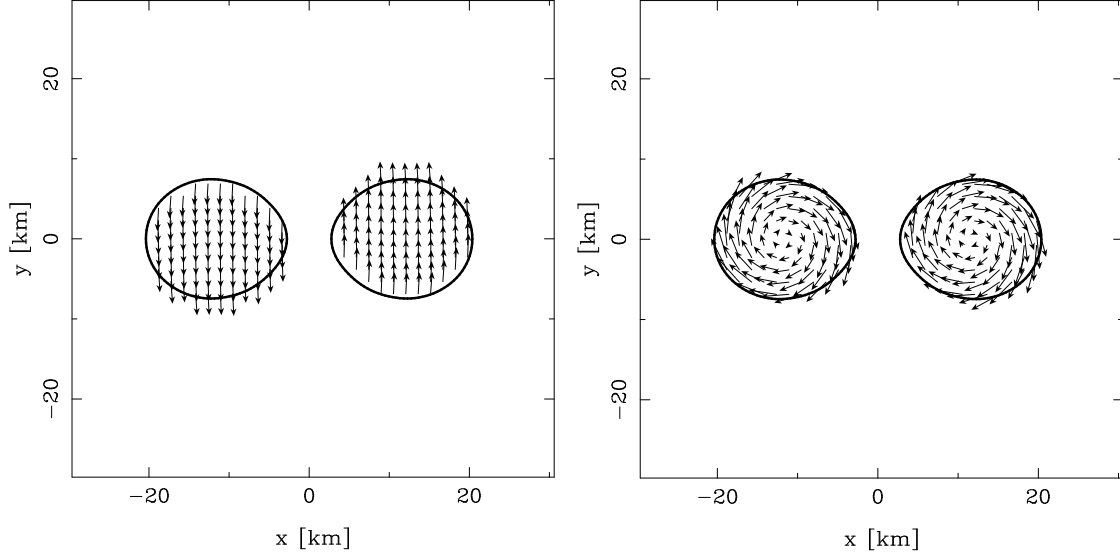


FIG. 6.5 – Internal velocity fields of irrotational strange quark stars binaries at the ISCO. *upper panel* : velocity  $U$  in the orbital plane with respect to the “inertial” frame (Eulerian observer) ; *lower panel* : velocity field with respect to the corotating frame. The thick solid lines denote the surface of each star.

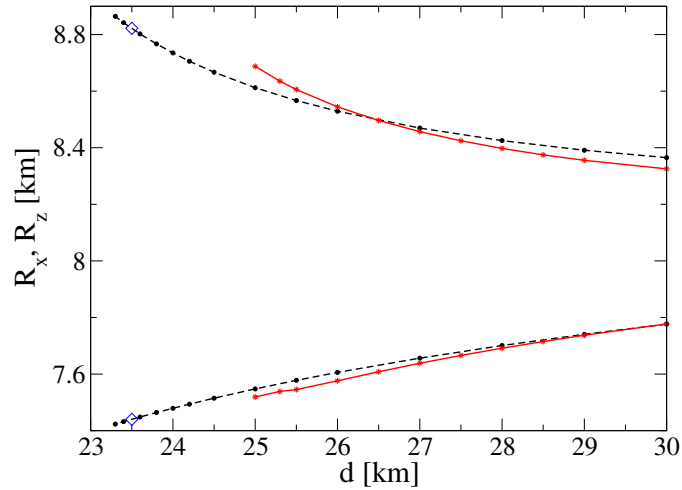


FIG. 6.6 – Coordinate “radius” (half the coordinate size of a star in fixed direction) versus coordinate separation for irrotational quasi-equilibrium sequences of binary strange stars (solid line) and neutron stars (dashed line). Upper lines correspond to equatorial radius  $R_x$  (radius along the  $x$  axis going through the centers of stars in a binary system) and lower lines are polar radius  $R_z$  (radius along the rotation axis).

by the ratio of polar and equatorial radius, in the case of strange stars than in the case of neutron stars [2, 42, 64, 68, 131, 161].

The differences in the evolution of binary (or rotating) strange stars and neutron stars stem from the fact that strange stars are principally bound by another force than gravitation : the strong interaction between quarks.

As already mentioned the frequency of gravitational waves is one of potentially observable parameters by the gravitational wave detectors. We can see from Fig. 6.7 that the 3rd PN approximations for point masses derived by different authors are giving ISCO at very high frequencies of gravitational waves  $> 2$  kHz. Since in the hydrodynamical phase of inspiral the effect of a finite size of the star (e.g. tidal forces) is very important we see deviation of our numerical results from point-masses calculations. The frequency of gravitational waves at the ISCO strongly depends on equation of state and the rotational state. For irrotational equal mass (of  $1.35 M_{\odot}$  at infinite separation) strange stars binaries described by the simple MIT bag model this frequency is  $\sim 1400$ Hz and for neutron stars binaries described by four different realistic EOS it is between 800Hz and 1230Hz [18, 110].

## 6.6 Summary and discussion

We have computed evolutionary sequences of irrotational and corotating binary strange stars by keeping the baryon mass constant to a value that corresponds to individual gravitational masses of  $1.35 M_{\odot}$  at infinite separation. The last orbits of inspiraling binary strange stars have been studied in the quasi-equilibrium approximation and in the framework of Isenberg-Wilson-Mathews approximation of general relativity. In order to calculate hydrodynamical phase of inspiraling irrotational strange stars binaries, i.e. assuming that the fluid has zero vorticity in the inertial frame, we found the boundary condition for the velocity potential. This boundary condition is valid for both the case of non-vanishing (e.g. self-bound matter) and vanishing density at the stellar surface (neutron star matter). In our calculations strange stars are built by strange quark matter described by the simplest MIT bag model (assuming massless and non-interacting quarks).

We have located the end of each quasi-equilibrium sequence (ISCO), which corresponds to some orbital instabilities (the dynamical instability for irrotational case or the secular one for synchronized case) and determined the frequency of gravitational waves at this point. This characteristic frequency yields important information about the equation of state of compact stars and is one of the potentially observable parameters by the gravitational wave detectors. In addition, the obtained configurations provide valuable initial conditions for the merger phase. We found the frequency of gravitational waves at the ISCO to be  $\sim 1400$  Hz for irrotational strange star binaries and  $\sim 1000$  Hz for synchronized case. The irrotational case is more realistic since the viscosity of strange star matter is far too low to ensure synchronization during the late stage of the inspiral. For irrotational equal mass (of  $1.35 M_{\odot}$ ) neutron star binaries described by realistic EOS [18, 110] the frequency of gravitational waves at the ISCO is between 800Hz and 1230Hz, much lower than for a binary strange quark star built of self-bound strange quark matter. We have considered only strange quark stars described by the simple MIT bag model

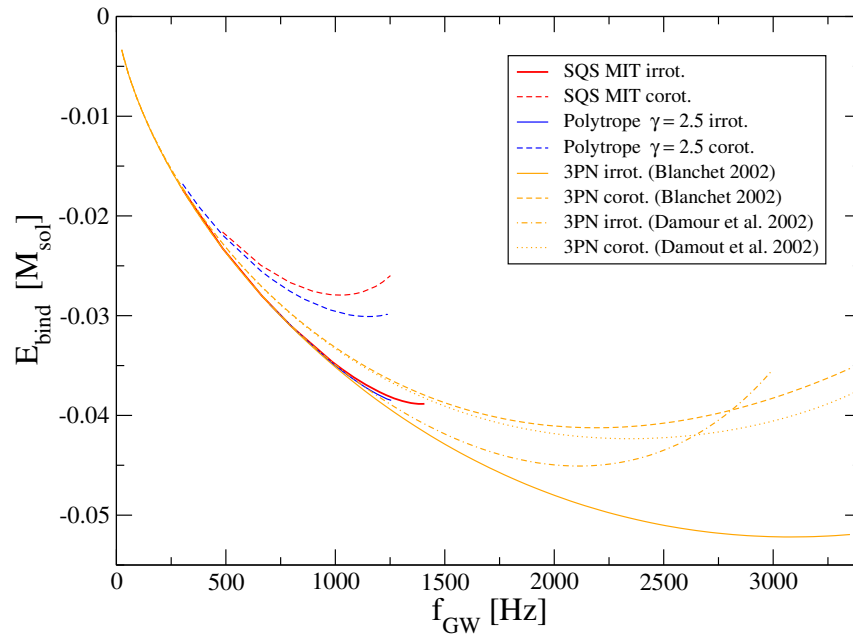


FIG. 6.7 – Binding energy versus frequency of gravitational waves along evolutionary sequences of corotational (thick dashed lines) and irrotational (thick solid lines) equal mass (of  $1.35 M_{\odot}$ ) strange stars and polytropic neutron stars binaries compared with analytical results at the 3rd post-Newtonian order for point-masses by Damour et al. 2000 [51], Damour et al. 2002 [50] and Blanchet 2002 [21]



with massless and non-interacting quarks. In order to be able to interpret future gravitational-wave observations correctly it is necessary to perform calculations for different strange star EOS parameters (taking also into account the existence of a thin crust) and for large sample of neutron stars described by realistic equations of state. For some MIT bag model parameters one is able to obtain less compact stars than considered in the present paper. In this case the frequency of gravitational waves at the end of inspiral phase will be lower than obtained by us. It should be also taken into account that stars in a binary system can have different masses [33]. The case of binary stars (with equal masses and different masses) described by different strange quark matter models will be presented in a separate paper [67].

We have shown the differences in the inspiral phase between strange quark stars and neutron stars described by polytropic equation of state having the same gravitational mass and radius in the infinite separation. It was already shown by Bejger et al. 2005 [18] that the frequency of gravitational waves at the end point of inspiraling neutron stars described by several realistic EOS without exotic phases (such as meson condensates or quark matter) can be predicted, in a good approximation, by studying binaries with assumed polytropic EOSs with  $\gamma = 2$  or  $2.5$ . For realistic EOS and polytropes with  $\gamma \leq 2.5$  [134, 141] a quasi-equilibrium irrotational sequence terminates by mass-shedding limit (where a cusp on the stellar surface develops).

We found that it wasn't the case for inspiraling strange star binaries which are self-bound objects having very large adiabatic index in the outer layer. For both synchronized and irrotational configurations, we could always find a turning point of binding energy along an evolutionary sequence of strange quark stars, which defines an orbital instability and thus marks the ISCO in this case. In the irrotational case for the same separation strange stars are less deformed than polytropic neutron stars and for the same ratio of coordinate radius  $R_x/R_z$  their surfaces are more smooth. A cusp doesn't appear on the surface of a strange star in a binary system even for separation corresponding to orbital instability. The frequency of gravitational waves at the end of inspiral phase is higher by 300 Hz for the strange star binary system than for the polytropic neutron star binaries. The differences in the evolution of binary (or rotating) strange stars and neutron stars stem from the fact that strange stars are principally bound by an additional force, strong interaction between quarks.

# Chapitre 7

## Final phase of inspiral of strange quark stars binaries

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>7.2</b>	<b>Equations of state and stellar models . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>7.3</b>	<b>Assumptions and Methods . . . . .</b>	<b>112</b>
7.3.1	Assumptions . . . . .	112
7.3.2	Equations to be solved . . . . .	113
7.3.3	Numerical method . . . . .	114
<b>7.4</b>	<b>Evolutionary sequences . . . . .</b>	<b>114</b>
<b>7.5</b>	<b>Results for equal-mass strange star binaries with <math>M_\infty = 2.7 M_\odot</math> . . . . .</b>	<b>115</b>
7.5.1	The impact of EOS on the GW frequency at ISCO . . . . .	116
7.5.2	Analytical fits to numerical results . . . . .	118
7.5.3	Energy spectrum of gravitational waves . . . . .	120
<b>7.6</b>	<b>Influence of the mass . . . . .</b>	<b>121</b>
<b>7.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>125</b>

---

# The final phase of inspiral of strange quark stars binaries

**Dorota Gondek-Rosinska and François Limousin**

To be submitted to Phys. Rev. D

## ABSTRACT

We present calculations of the final phase of inspiral of irrotational strange star binaries. Two types of equation of state at zero temperature are used - the MIT bag model and the Dey et al. 1998 model of strange quark matter. We study the precoalescence stage within the Isenberg-Wilson-Mathews approximation of General Relativity using a multidomain spectral method. The gravitational-radiation driven evolution of the binary system is approximated by a sequence of quasi-equilibrium configurations at a fixed baryon number and with decreasing separation. We find that the innermost stable circular orbit (ISCO) is determined always by an orbital instability for binaries consisting of two stars built predominantly of strange quark matter independently on the total mass of a binary system and compactness parameter of each star. In contrast, for neutron stars described by baryonic equation of state without exotic phases the ISCO is given by the mass-shedding limit. The gravitational wave frequency at the ISCO, which marks the end of the inspiral phase, is always higher than 1.1kHz for equal masses irrotational strange quark stars with the total gravitational mass of a binary system greater than  $2M_{\odot}$ . Detailed comparisons with binary neutrons star models, as well as with the third order Post-Newtonian point-mass binaries are given. The relative difference between binding energy of quasi-equilibrium sequences of two  $1.35M_{\odot}$  strange stars and the 3PN point-mass calculation, caused by the finite size effects, at the frequency of gravitational waves corresponding to the 'quasi-equilibrium' ISCO is  $\sim 7\%$ .

## 7.1 Introduction

Coalescing compact object binaries are the strongest and hence the most promising sources of gravitational waves (GW) for LIGO, VIRGO and other interferometric detectors [19, 35, 90]. Among these, binary neutron stars have been a subject of extreme interest since the GW signal of terminal phases of evolution of such binary system could yield important information about the equation of state (EOS) at nuclear densities (e.g [18, 57, 96, 110, 126, 134]). One can impose strong constraints on the EOS of neutron stars using a simple method based on the properties of quasi-equilibrium binary sequences [18, 57, 96]. One can get the compactness parameter  $M/R$  of neutron stars (where  $M$  is gravitational mass and  $R$  stellar radius of an isolated neutron star) based on the observed deviation of the gravitational energy spectrum of a quasi-equilibrium sequence from point-mass behavior at the end of inspiral [18, 57, 96, 134]. In addition the individual masses of the two neutron stars in a binary system can be determined taking into account the frequency evolution of the GW signal of the inspiral phase and high-order PN effects on the phase evolution of the signal [47].

Several groups have studied the last orbits of inspiraling binary neutron stars in the quasi-equilibrium approximation, and in the framework of Isenberg-Wilson-Mathews (IWM) approximation of general relativity (see [17] for a review). The quasi-equilibrium assumption approximates the evolution of the system by a sequence of exactly circular orbits (as the time evolution of the orbit is much larger than the orbital period). The IWM approximation amounts to using a conformally flat spatial metric, which reduces the problem to solving only five of the ten Einstein equations. Typically, the computed fields satisfy the constraints of full general relativity to within 1%. The equilibrium configurations have been calculated for irrotational binaries since the viscosity of neutron star matter is far too low to ensure synchronization during the late stage of the inspiral [20, 92].

In order to construct accurate templates of expected GW signal from neutron stars binaries one has to take into account realistic description of nuclear matter and astrophysically relevant masses of neutron stars in a binary system.

Almost all relativistic studies of the final phase of the inspiral of close binary neutron stars systems employ a simplified EOS of dense matter, namely a polytropic EOS [30, 56, 57, 72, 101, 102, 132, 134, 139, 141]. There are only three exceptions : (i) Oechslin et al. have used a pure nuclear matter EOS, based on a relativistic mean field model and a ‘hybrid’ EOS with a phase transition to quark matter at high density [110]; (ii) Bejger et al. have computed quasi-equilibrium sequences based on three nuclear matter EOS [18] iii) Limousin et al. have studied the properties of binary strange quark stars described by the simplified MIT bag model (with massless and not interacting quarks) of strange quark matter [96]. In these three papers the authors have considered only binary systems consisting of two identical stars. The assumption of almost equal masses of neutron stars in binary system was based on the current set of well-measured neutron stars masses in relativistic binary radio pulsars. One has to note that the conclusions based on analysis of properties of radio binary pulsars suffer from small number statistics and from several selection effects.

The evolutionary sequences presented in the paper are the natural extension of the work already published [96]. We calculate the final phase of inspiral of irrotational strange quark star

binaries using the MIT bag model and the Dey et al. 1998 model of strange quark matter. We study the impact of the equation of state and total energy-mass on the last orbits of binary strange quark stars. We compare the evolution of strange star binaries with neutron star binaries in order to find any characteristic features in the gravitational waveform that will help to distinguish between strange stars and neutron stars.

The paper is organized in the following way : Sec. II is devoted to the description of the EOSs used to describe strange stars. Sec. III is a brief summary of the assumptions upon which this work is based and a short description of the basic equations for quasi-equilibrium configurations. In Sec. IV we comment on the properties of evolutionary sequences and define the notion of innermost stable circular orbit. In Sec. V we present the numerical results for irrotational strange stars binaries of  $M = 1.35M_\odot$  and compare their evolution with that of neutron stars. Then in Sec. VI we show the results obtained for binary strange stars with different total mass. Section VII contains the final discussion.

Throughout the paper, we use geometrized units, for which  $G = c = 1$ , where  $G$  and  $c$  denote the gravitational constant and speed of light respectively.

## 7.2 Equations of state and stellar models

Strange quark stars are currently considered as a possible alternative to neutron stars as compact objects (see e.g. [65, 100, 146] and references therein). Typically, strange stars are modeled with an EOS based on the MIT-bag model (e.g. [1, 80]) in which quark confinement is described by an energy term proportional to the volume [58]. There are three physical quantities entering the MIT-bag model : the mass of the strange quarks,  $m_s$ , the bag constant,  $B$ , and the strength of the QCD coupling constant  $\alpha$ . In the framework of this model the quark matter is composed of massless u and d quarks, massive s quarks and electrons. We performed calculations for three different sets of parameters of the MIT-bag model (note that SQS stands for Strange Quark Stars) :

- i) **SQSB56** - the standard MIT bag model :  $m_s c^2 = 200$  MeV,  $\alpha = 0.2$ ,  $B = 56$  MeV/fm<sup>3</sup> ;
- ii) **SQSB60** - the simplified MIT bag model with  $m_s = 0$ ,  $\alpha = 0$  ;  $B = 60$  MeV/fm<sup>3</sup> ;
- iii) **SQSB40** - the "extreme" MIT bag model (relatively low strange quark mass and  $B$  but high  $\alpha$ ) :  $m_s c^2 = 100$  MeV,  $\alpha = 0.6$ ,  $B = 40$  MeV/fm<sup>3</sup>.

The second type of EOS which we employ is the Dey et al. (1998) EOS of strange quark matter. In this model, quarks of the density dependent mass are confined at zero pressure and deconfined at high density. The quark interaction is described by an interquark vector potential originating from gluon exchange, and by a density dependent scalar potential which restores the chiral symmetry at high densities. This model, with an appropriate choice of the EOS parameters, gives absolutely stable strange quark matter. Two cases of this model have been used in the literature SS1 and SS2 - both giving a rather low value for the maximum gravitational mass  $M_{\max} = 1.33 M_\odot$  and  $M_{\max} = 1.44 M_\odot$  respectively. We have chosen the SS2 model and call it **DSQS** in our paper. The stars described by the Dey et al. (1998) model are very compact i.e. the gravitational redshifts  $z$  for the maximum mass configurations are much larger than those for strange stars within the MIT bag model (also larger than  $z$  for most models of neutron stars).

## 7.2. EQUATIONS OF STATE AND STELLAR MODELS

EOS	$M[M_\odot]$	$M_B[M_\odot]$	$R$ [km]	$M/R$
SQSB40 $a = 0.324, \rho_0 = 3.0563$	0.5	0.5611	9.001	0.0820
	1.35	1.6081	12.09	0.1648
	1.5	1.805	12.41	0.1784
	1.75	2.1434	12.84	0.2011
SQSB60 $a = 1/3, \rho_0 = 4.2785$	0.5	0.5899	8.026	0.0920
	1	1.2296	9.877	0.1495
	1.35	1.7076	10.68	0.1867
	1.65	2.1406	11.10	0.2196
SQSB56 $a = 0.301, \rho_0 = 4.4997$	0.5	0.5383	7.865	0.0939
	0.7	0.7668	8.709	0.1187
	1	1.1233	9.637	0.1532
	1.2	1.3707	10.09	0.1756
	1.35	1.5620	10.35	0.1925
	1.5	1.7587	10.54	0.2101
	1.65	1.9617	10.62	0.2295
DSQS $a = 0.463, \rho_0 = 11.53$	1.35	1.7191	7.336	0.2717

TAB. 7.1 – Global parameters of isolated static strange stars for the four EOS used in our computations. The symbols have following meaning :  $M$  is the gravitational mass,  $M_B$  the baryon mass,  $R$  stellar radius,  $M/R \equiv GM/Rc^2$  is the compaction parameter. For each type of EOS the constants  $\rho_0$  in units  $[10^{14} \text{ g cm}^3]$  and  $a$  used in equations (7.1) and (7.2) are given.

It was shown that different strange quark EOS can be approximated very well by following formulas [64, 160] :

$$p = a(\rho - \rho_0), \quad (7.1)$$

$$n(p) = n_0 \cdot \left[ 1 + \frac{1+a}{a} \frac{p}{\rho_0} \right]^{1/(1+a)}, \quad (7.2)$$

where  $n$  is the baryon density and  $a, \rho_0, n_0$  are some constants. In general this equation corresponds to a self-bound matter with mass density  $\rho_0$  and baryon density  $n_0$  at zero pressure and with a fixed sound velocity  $\sqrt{a}$  at all pressures. The parameters  $a$  and  $\rho_0$  for each EOS used in the paper are given in Table I. The strange stars described by the DSQS model have very high density at the surface  $\rho_0 = 1.15 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ . For the MIT bag model the  $\rho_0$  is in the range  $\sim 3 \times 10^{14} - 6.4 \text{ g/cm}^3$  [65, 160]. The parameter  $a$  is found to be between 0.289 and 1/3 (for  $0 \leq \alpha \leq 0.6$  and  $0 \leq m_s \leq 250 \text{ MeV}$ ) [160] for the MIT bag model and 0.463 for DSQS model [64]. The higher value of  $a$  and of  $\rho_0$  the higher compactness parameter of a star with fixed gravitational mass.

In Fig. 1 we present gravitational mass versus stellar radius for sequences of static strange quark stars. Circles correspond to configurations studied in the paper. The global parameters are

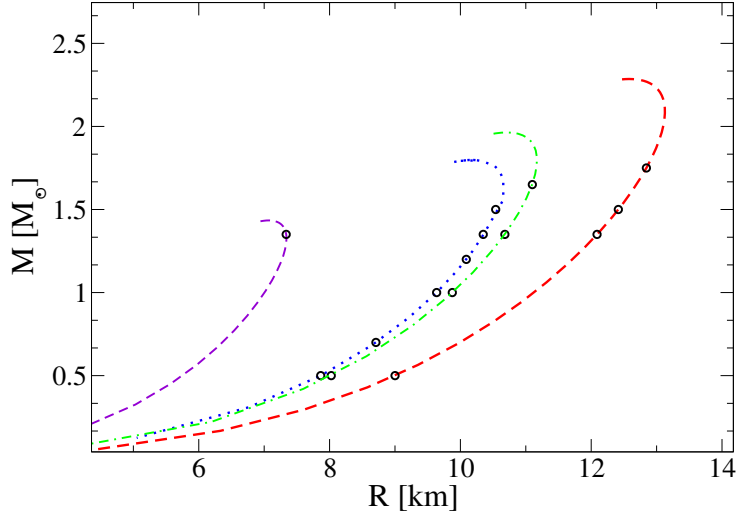


FIG. 7.1 – Gravitational mass  $M$  versus stellar radius  $R$  for sequences of static isolated strange quark stars described by three different sets of parameters of the MIT-bag model and by the Dey et al. (1998) model. The circles correspond to stellar configurations considered in calculations of equal-mass evolutionary sequences. It corresponds, from the left one to the right one respectively, to DSQS, SQSB56, SQSB60 and SQSB40 equations of state.

given in table I. Depending on the model we obtain the radius of a  $1.35 M_{\odot}$  star in the range 7-13 km.

## 7.3 Assumptions and Methods

### 7.3.1 Assumptions

The first assumption regards the matter stress-energy tensor  $T$ , which we assume to have the **perfect fluid** form :

$$T = (e + p)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p\mathbf{g}, \quad (7.3)$$

where  $e$ ,  $p$ ,  $\mathbf{u}$  and  $\mathbf{g}$  are respectively the fluid proper energy density, the fluid pressure, the fluid 4-velocity, and the spacetime metric. This constitutes an excellent approximation for neutron star matter or strange star matter.

The last orbits of inspiraling binary compact stars can be studied in the **quasi-equilibrium** approximation. Under this assumption the evolution of a system is approximated by a sequence of exactly circular orbits. This assumption results from the fact that the time evolution of an orbit is still much larger than the orbital period and that the gravitational radiation circularizes an orbit of a binary system. This implies a continuous spacetime symmetry, called *helical symmetry*

[28, 60] represented by the Killing vector :

$$\ell = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (7.4)$$

where  $\Omega$  is the orbital angular velocity and  $\partial/\partial t$  and  $\partial/\partial \varphi$  are the natural frame vectors associated with the time coordinate  $t$  and the azimuthal coordinate  $\varphi$  of an asymptotic inertial observer.

We also assume that the spatial part of the metric (i.e. the metric induced by  $g$  on each hypersurface  $\Sigma_t$ ) is conformally flat, which corresponds to the **Isenberg-Wilson-Mathews** (IWM) approximation to general relativity [87, 88, 149] (see Ref. [60] for a discussion). Thanks to this approximation we have to solve only five of the ten Einstein equations.

The fourth assumption concerns the fluid motion inside each star. We only consider **irrotational** motion (assuming that the fluid has zero vorticity in the inertial frame).

#### 7.3.2 Equations to be solved

We just mention briefly all the equations we have to solve and refer the reader to Limousin et al. [96] for more details.

The gravitational field equations have been obtained within the 3+1 decomposition of the Einstein's equations [39, 158], using the extended conformal thin sandwich formalism [?] and taking into account the helical symmetry of spacetime. This gives two scalar elliptic equations for  $\nu = \ln N$  and  $\beta = \ln(AN)$ , coming from the trace of the spatial part of the Einstein equations combined with the Hamiltonian constraint,  $N$  being the lapse function and  $A$  the conformal factor, and one vectorial elliptic equation for the shift vector  $N^i$  coming from the momentum constraint.

Apart from the gravitational field equations, we have to solve for the fluid equations. The equations governing the quasi-equilibrium state are the relativistic Euler equation and the equation of baryon number conservation. Irrotational motion admit a first integral of the relativistic Euler equation :

$$H + \nu - \ln \Gamma_0 + \ln \Gamma = \text{const.}, \quad (7.5)$$

where  $H$  is the pseudoenthalpy,  $\Gamma_0$  is the Lorentz factor between the co-orbiting and the Eulerian observers and  $\Gamma$  is the Lorentz factor between the fluid and the co-orbiting observers ( $\Gamma = 1$  for synchronized binaries).

The equation of baryon number conservation is written as an elliptic equation for the velocity potential  $\Psi$ . The method of solving this equation is different for neutron stars and strange stars. For strange stars, we have to impose a boundary condition for the velocity potential at the surface of the star (see paragraph IV.C of [96] for details). We derived a Neumann-like boundary condition

$$(\bar{\nabla}^i n \bar{\nabla}_i \Psi) \Big|_{\text{surf}} = - \left( \frac{\Gamma_n h A^2}{N} B^i \bar{\nabla}_i n \right) \Big|_{\text{surf}}. \quad (7.6)$$



where  $\bar{\nabla}^i$  stands for the covariant derivative associated with the flat 3-metric,  $n$  is the baryon density,  $h := \exp(H)$  and  $B^i$  is the shift vector of co-orbiting coordinates.

### 7.3.3 Numerical method

The resolution of the above nonlinear elliptic equations is performed thanks to a numerical code based on multidomain spectral methods and constructed upon the *LORENE* C++ library [98]. The detailed description of the whole algorithm, as well as numerous tests of the code can be found in [72]. Additional tests have been presented in Sec. 3 of [134]. The code has already been used successfully for calculating the final phase of inspiral of binary neutron stars described by polytropic EOS [30, 132–135], realistic EOS [18] as well as binary strange stars [96]. It is worth to stress that the adaptation of the domains (numerical grids) to the stellar surface (surface-fitted coordinates) used in this code is particularly useful here, due to the strong discontinuity of the density field at the surface of strange stars. Adapting the grids to the stellar surface allows to avoid the severe Gibbs phenomenon that such a discontinuity would necessary generate when performing polynomial expansions of the fields [29].

We used one numerical domain for each star and 3 (resp. 4) domains for the space around them for a small (resp. large) separation between stars. In each domain, the number of collocation points is chosen to be  $N_r \times N_\theta \times N_\varphi = 25 \times 17 \times 16$ , where  $N_r$ ,  $N_\theta$ , and  $N_\varphi$  denote the number of collocation points (= number of polynomials used in the spectral method) in the radial, polar, and azimuthal directions respectively.

We stop the iterations when the convergence, i.e. the difference  $\delta H$  in enthalpy between two steps, has reached  $10^{-7}$ . We thus obtain an accuracy, estimated using a relativistic generalization of the virial theorem [60], of a few times  $10^{-5}$  for the closest configurations.

## 7.4 Evolutionary sequences

The evolution of a binary system of compact objects is entirely driven by gravitational radiation and can be roughly divided into three phases : point-like inspiral, hydrodynamical inspiral and merger. The first phase corresponds to large orbital separation (much larger than the neutron star radius) and can be treated analytically using the post-Newtonian (PN) approximation to general relativity (see Ref. [22] for a review). In the second phase the orbital separation becomes only a few times larger than the radius of the star, so the effects of tidal deformation, finite size and hydrodynamics play an important role. In this phase, since the shrinking time of the orbital radius due to the emission of gravitational waves is still larger than the orbital period, it is possible to approximate the state as quasi-equilibrium [14, 30]. The final phase of the evolution is the merger of the two objects, which occur dynamically [111, 125, 127, 128]. The quasi-equilibrium computations from the second phase provide valuable initial data for the merger [56, 110, 125, 127].

We focus on the last orbits of inspiral phase (the hydrodynamical inspiral). In this section, we present the numerical results for evolutionary sequences of close strange stars binaries described by three different sets of parameters of the MIT bag model and the Dey model in-

## 7.5. RESULTS FOR EQUAL-MASS STRANGE STAR BINARIES WITH $M_\infty = 2.7 M_\odot$

roduced in Sect. II. We consider only equal-mass binary systems with different total masses. By evolutionary sequence, we mean a sequence of quasi-equilibrium configurations of decreasing separation and with constant baryon mass  $M_B$ , which are expected to approximate the true evolution of a binary system. In order to investigate the properties of the GW emission during the final phase of binary strange star inspiral we focus on the variation of the ADM (Arnowitt-Deser-Misner) mass of the system  $M_{\text{ADM}}$  (total binary mass-energy) with respect to the GW frequency. These two quantities are sufficient to determine the GW energy spectrum. The orbital binding energy is defined by

$$E_{\text{bind}} := M_{\text{ADM}} - M_\infty, \quad (7.7)$$

where  $M_\infty$  is the ADM mass of the system at infinite separation, that is the sum of the gravitational masses of isolated static stars,  $M_\infty = 2 \times M$ . The variation of  $E_{\text{bind}}$  along an evolutionary sequence corresponds to the loss of energy via gravitational radiation. Gravitational waves are emitted mostly at twice the orbital frequency :  $f_{\text{GW}} = 2f = \Omega/\pi$ .

### *Innermost stable circular orbit*

The physical inspiral of binary compact stars terminates by either the orbital instability (turning point of  $E_{\text{bind}}$ ) or the mass-shedding limit (when a cusp forms at the stellar surface in the direction of the companion (Roche lobe overflow)). In both cases, this defines the *innermost stable circular orbit*. The frequency of gravitational waves at the ISCO is one of potentially observable parameters by the gravitational wave detectors. This frequency strongly depends on EOS of neutron star matter(e.g. [18]).

## 7.5 Results for equal-mass strange star binaries with $M_\infty = 2.7 M_\odot$

The variation of the orbital binding energy along evolutionary sequences with  $M_\infty = 2 \times 1.35 = 2.7 M_\odot$  is presented in Fig. 7.2, The different symbols (triangles, stars, diamonds and squares) indicate the individual equilibrium configurations calculated numerically. The big diamonds correspond to the minimum of binding energy of an evolutionary sequence. A turning point of  $E_{\text{bind}}$  along an evolutionary sequence indicate an orbital instability [60]. This instability originates both from relativistic effects (the well-known  $r = 6M$  last stable orbit of Schwarzschild metric) and hydrodynamical effects (see for instance [135] in the Newtonian regime).

We present also the 3rd order point masses post-newtonian (PN) approximation derived by Blanchet [21] (solid line). Comparison of our numerical results with the 3PN calculations reveals a good agreement for small frequencies (large separations). The deviation from PN curves at higher frequencies (smaller separation) is due to hydrodynamical effects, which are not taken into account in the PN approach. The 3PN results derived by different authors give ISCO at very high frequencies of gravitational waves  $> 2$  kHz [21, 50, 51]

A turning point of  $E_{\text{bind}}$  is visible for each of the three binary strange stars described by the

MIT bag model but by the DSQS. In contrast for realistic EOS of neutron stars [18] and polytropes with  $\gamma \leq 2.5$  [57, 134, 141] a quasi-equilibrium irrotational sequence terminates always by mass-shedding limit. The frequency of gravitational waves at the ISCO is found to be in the range  $\sim 1130 - 1470$  Hz for the MIT bag model. Concerning the numerical results for the DSQS model we have finished our calculations before the orbital instability was reached. We were not able to compute closer configurations for this model since due to the very high compactness parameter of these strange stars our code has difficulties converging to a solution. The shape of the MIT bag model strange stars at the ISCO and the closest computed configuration in the case of DSQS model are presented in Fig. 7.3. The stars for DSQS model are in fact still nearly spherical. One can thus suppose that the turning point should exist also for the DSQS model of strange matter for very high frequency of gravitational waves (greater than 2.1 kHz).

### 7.5.1 The impact of EOS on the GW frequency at ISCO

It was already suggested by many authors that the frequency of GW at the ISCO strongly depends on the compactness parameter and thus on EOS of nuclear matter. In Fig 4. we plot the frequency of GW at ISCO as a function of compactness parameter for equal-mass binaries (consisting of two  $1.35M_{\odot}$ ) strange stars described by the MIT bag model and neutron stars described by realistic and polytropic EOS with  $\Gamma = 2$ . All evolutionary sequences of binary strange stars terminate at the dynamical orbital instability while equilibrium sequences of binary neutron stars by the mass-shedding limit.

We see that for equal-mass evolutionary sequences with the same total mass the dependence  $f_{\text{GW,ISCO}}$  versus the compactness parameter can be describe by linear function for all EOS. The higher compactness of a star is, the higher frequency of gravitational waves at the ISCO is. We see that the results obtained for polytropic EOS fit quite well the calculations performed for neutron stars described by realistic EOS. Indeed as found by Bejger et al. 2005 [18] the frequency of gravitational waves at the end point of inspiraling neutron stars described by several realistic EOS without exotic phases (such as meson condensates or quark matter) can be predicted, in a good approximation, by studying binaries with assumed polytropic EOSs with  $\gamma = 2$  or 2.5. As found by Limousin et al. [96] it wasn't the case for inspiraling strange star binaries which are self-bound objects having very large adiabatic index in the outer layer. The frequency of gravitational waves at the end of inspiral phase is higher by  $\sim 150$  Hz for strange star binaries than for the polytropic neutron star binaries with the same gravitational mass and stellar radius in infinite separation. The differences in the evolution of binary strange stars and neutron stars stem from the fact that strange stars are principally bound by another force than gravitation : the strong interaction between quarks. Thanks to this, at the end of the inspiral phase, neutron stars are, for the same separation, more oblate than strange stars. And thus a cusp forms at the stellar surface of neutron stars, which marks the beginning of exchange of matter between the two stars, whereas the surface of strange stars is smooth even at the dynamical instability (see Fig. 7.3).

The frequency at the end point described by three nuclear EOS for the neutron star matter is ranging from 806 Hz for GNH3 EOS (compactness  $M/R = 0.14$ ) to 1270 Hz for BPAL 12 EOS (compactness  $M/R = 0.191$ ) [18]. The range of frequency at the ISCO for binary neu-

### 7.5. RESULTS FOR EQUAL-MASS STRANGE STAR BINARIES WITH $M_\infty = 2.7 M_\odot$

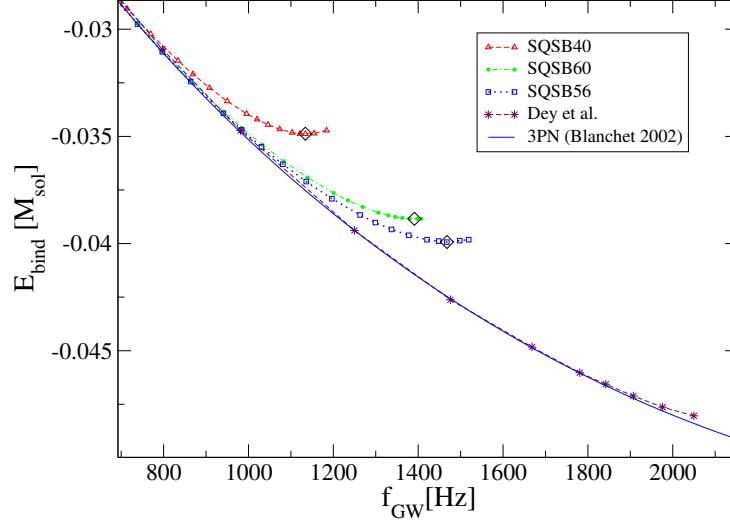


FIG. 7.2 – Orbital binding energy  $E_{\text{bind}} = M_{\text{ADM}} - 2M$  as a function of gravitational wave frequency (twice the orbital frequency) along evolutionary sequences of irrotational equal mass (of  $1.35 M_\odot$ ) strange star binaries described by the four EOS introduced in Section 2. The dotted line correspond to the 3rd post-Newtonian point masses approximation derived by Blanchet [21].

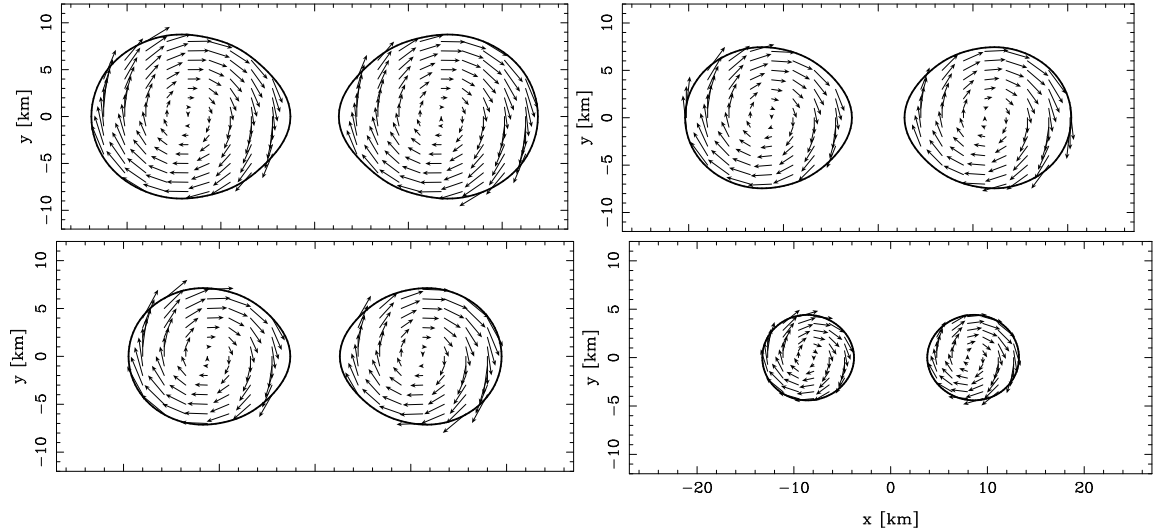


FIG. 7.3 – Velocity field with respect to the co-orbiting frame in the orbital plane for strange stars at the coordinate separation corresponding to ISCO (three upper panels) or to the closest calculated configuration (the lowest panel). The panels correspond to three types of the MIT bag model, SQSB40, SQSB60, SQSB56 and Dey et al. (1998) EOS SQSD from the upper left one to the lower right one respectively. The thick solid lines denote stellar surfaces.

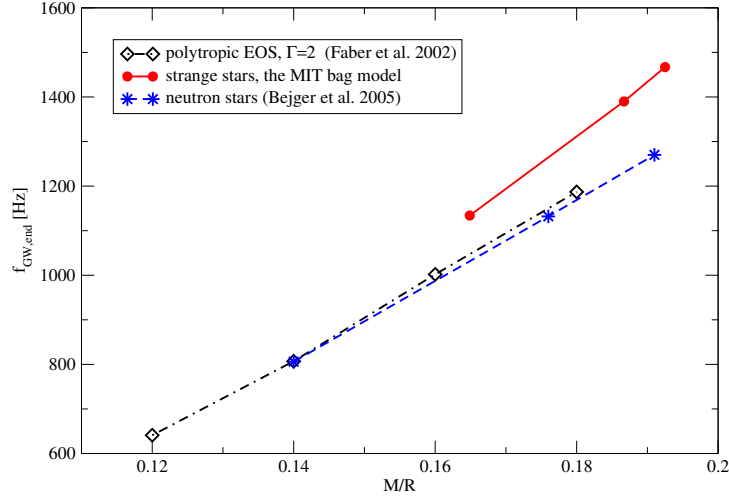


FIG. 7.4 – The frequency of ISCO (the dynamical orbital instability for strange quark stars or the mass-shedding limit for neutron stars) versus compactness parameter for equal-mass (of  $1.35M_{\odot}$ ) strange stars and neutron stars described by realistic EOS [18] and polytropic EOS [57]

tron stars,  $f_{\text{GW}} \in [806, 1270]$ , intersects with the range of frequency for binary strange stars,  $f_{\text{GW}} \in [1130, \geq 2000]$ . The determination of the gravitational wave frequency at the ISCO by the laser interferometers will then lead to impose strong constraints on the EOS of matter at ultra-high densities but is not sufficient to distinguish completely between strange stars or neutron stars.

### 7.5.2 Analytical fits to numerical results

As already mentioned the 3PN calculations are reproducing quite well our results for small frequencies (large separations). For close separation we see the deviation from point-mass calculations mainly due to hydrodynamical effects. The observed deviation of the GW energy spectrum for quasi-equilibrium sequences (given by the derivative  $dE_{\text{bin}}/df_{\text{GW}}$ ) from point-mass behavior gives also important information about EOS of neutron stars in addition to the frequency of GW at the ISCO [57].

Following Faber et. al. (2002) [57] and Bejger et. al. (2005) [18], we perform some polynomial fits (see below) to each of the computed evolutionary sequences in order to obtain functions required for the GW energy spectrum. Two different approaches were used by authors to represent the variation of the total mass energy as a function of GW frequency. Faber et. al. (2002) [57] fitted the numerical results taking into account 3 terms :  $f^{2/3}$ ,  $f$  and  $f^2$  representing the Newtonian point-mass behavior, the lowest order post-Newtonian and finite-size

## 7.5. RESULTS FOR EQUAL-MASS STRANGE STAR BINARIES WITH $M_\infty = 2.7 M_\odot$

corrections, the tidal interaction energy respectively. However Bejger et. al. (2005) [18] found that it is possible to find much better approximations of numerical results taking into account high order PN terms. They have shown that the difference between the binding energy of equal-mass irrotational neutron star binaries and the binding energy of binary point masses in the 3PN approximation of Blanchet (2002) [21]  $E_{\text{bind}} - E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}$  can be fitted very well by the power-law dependence on frequency  $f_{\text{GW}}$  :

$$E_{\text{bind}} - E_{\text{bind}}^{3\text{PN}} = A \left( \frac{f_{\text{GW}}}{1000\text{Hz}} \right)^n. \quad (7.8)$$

The 3PN formula as obtained by Blanchet [21] from the standard post-newtonian expansion reads

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}}{M_\infty} = & - \frac{1}{8} \Omega_*^{2/3} + \frac{37}{384} \Omega_*^{4/3} + \frac{1069}{3072} \Omega_*^2 \\ & + \frac{5}{3072} \left( 41\pi^2 - \frac{285473}{864} \right) \Omega_*^{8/3}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

where  $\Omega_*$  is the orbital angular frequency expressed in geometrized units :

$$\Omega_* := 2\pi M_\infty f = 2\pi M f_{\text{GW}} = 2M\Omega. \quad (7.10)$$

The terms in  $\Omega_*^{2/3}$ ,  $\Omega_*^{4/3}$ ,  $\Omega_*^2$  and  $\Omega_*^{8/3}$  in Eq. (7.9) are respectively the Newtonian, 1PN, 2PN and 3PN term.

In Fig. 7.5, we present the difference between our numerical results and the 3PN approximation given by Eq. (7.9). Looking at the scale of Fig. 7.5, we see that the formula (7.9) approximates very well the behavior of a binary system of strange stars for a large range of frequencies.

Because of the steep character of the function  $E_{\text{bind}} - E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}$  seen in Fig. 7.5, the power  $n$  is quite large. The values are listed in Table 7.2. We didn't assume the integer number of the power  $n$ . We note that the values of the power  $n$  are similar for the three EOS of MIT bag model. So we also done fits for an intermediate value  $n = 6.5$  for these three EOS and denote by  $A_{n=6.5}$  its corresponding factor. The information on the frequency of departure from 3PN curve is thus entirely determined by the numerical factor  $A$ . The higher this factor is, the higher the frequency of departure. For Dey et. al. (1998) EOS, the power  $n$  is very high and the reference frequency of 1000 Hz used for the polynomial fit (7.8) is not well adapted to the frequency of gravitational waves obtained using this EOS, explaining the very small factor  $A$ .

From Fig. 7.5, we can define the frequencies  $f_{\text{npm}}$  as those frequencies at which the deviation from point-mass behavior becomes important. It can be defined more precisely by the frequency for which

$$\frac{E_{\text{bind}} - E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}}{E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}} = 0.001. \quad (7.11)$$

The values of these frequencies for the four EOS we considered are given in Table 7.3.

One can draw an important conclusion from the presented results and their comparison with relativistic approximations for point masses in a binary system. We can expect that taking into

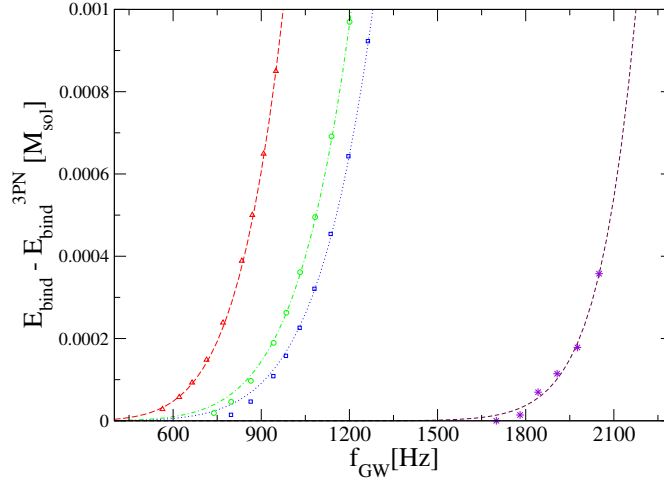


FIG. 7.5 – Difference  $E_{\text{bind}} - E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}$  between the binding energy of equal-mass of  $1.35 M_{\odot}$  irrotational strange quark star binaries and the binding energy of binary point masses in the 3PN approximation of Blanchet (2002) [21]. The different symbols (triangles, circles, squares and stars) correspond to the numerical results and lines to polynomial fits (7.8) to them.

EOS	$M/R$	$A [M_{\odot}]$	$n$	$A_{n=6.5} [M_{\odot}]$
SQSB40	0.1648	0.001174	6.28	0.001158
SQSB60	0.1867	0.0002888	6.59	0.0002961
SQSB56	0.1925	0.0001865	6.8	0.0002068
DSQS	0.2717	1.353e-9	17.38	x

TAB. 7.2 – Parameters  $A$ ,  $n$  and  $A_{n=6.5}$  ( $A$  for  $n = 6.5$ ) of polynomial fits (7.8) for equal-mass of  $1.35 M_{\odot}$  irrotational strange quark star binaries. We also recall the compaction parameter.

account the next orders in a post-Newtonian approximation doesn't change the energy by an amount larger than the difference between 2PN and 3PN models. As a consequence the large deviation of our numerical results from the 3PN approximation is caused by the effects of a finite size of the star, e.g. tidal forces. The very high power  $n$  indicates that high order tidal effects are very important, and dominates the relation  $E_{\text{bind}}(f_{\text{GW}})$ . Indeed, the lowest order tidal term is known to be  $n = 4$  [93] and the values obtained here are well above this.

### 7.5.3 Energy spectrum of gravitational waves

We compute the energy spectrum of gravitational waves obtained as the first derivatives of the fitted functions (7.8). The relation between  $dE_{\text{bind}}/df$  and the gravitational waves frequency  $f_{\text{GW}}$  is presented in Fig. 7.6. In this figure, we draw straight lines corresponding to the Newto-

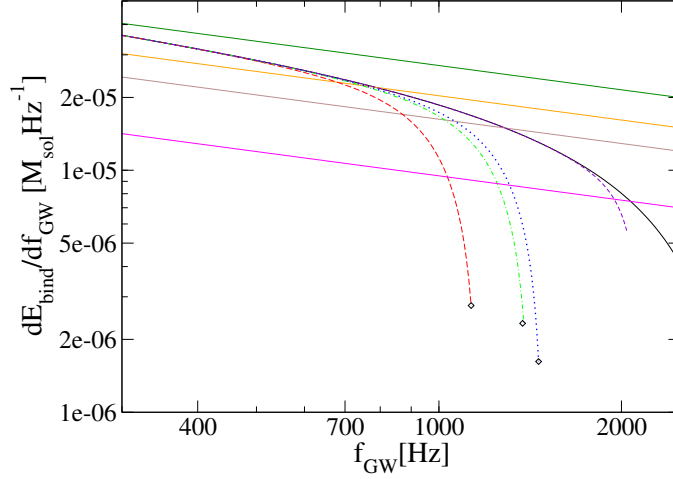


FIG. 7.6 – Energy spectrum of gravitational waves emitted by strange stars binaries versus frequency of gravitational waves along the four equal-mass of  $1.35 M_{\odot}$  irrotational quasi-equilibrium sequences. The straight lines correspond to the Newtonian dependence of energy multiplied by 1, 0.75, 0.6 and 0.35.

nian case  $\sim f_{\text{GW}}^{2/3}$  to find the break frequencies  $f_{25}$ ,  $f_{40}$  and  $f_{65}$  at which the energy spectrum has dropped respectively by 25 %, 40 % and 65 %. The values of the break frequencies for the four EOS used to described strange stars are given in Table 7.3. These values are important from the point of view of future detections : they show the difference between the amplitude of the real signal and the Newtonian template which allows to calculate the real wave form amplitude from the detector noise.

At the level of 25%, SQSB40 EOS is the only curve which deviate from the 3PN curve so we can already distinguish SQSB40 EOS and the other EOS. But this is only at  $f_{40}$  that we can discriminate between the four EOS. And even at this point, the curve for Dey et. al. (1998) EOS is still very close to the 3PN curve, because of its very high frequency of departure from 3PN curve. To see the deviation of Dey et. al. (1998) EOS from post-Newtonian results, we need to look at frequency  $f_{65}$  where the energy spectrum has dropped by 65 %.

## 7.6 Influence of the mass

Up to now, we studied the influence of the compaction parameter on the frequency of gravitational waves at the dynamical instability for stars of same mass but described by different EOS. In this section, we consider on the other hand binary strange stars described by the same EOS but of different total masses.

In Fig. 7.7 we show the orbital binding energy along evolutionary sequences of binary strange stars described by SQSB60 EOS for stars of gravitational mass in isolation of 1, 1.35 and  $1.65 M_{\odot}$ . For each masses, there is a turning point of  $E_{\text{bind}}$ , the quasi-equilibrium sequences



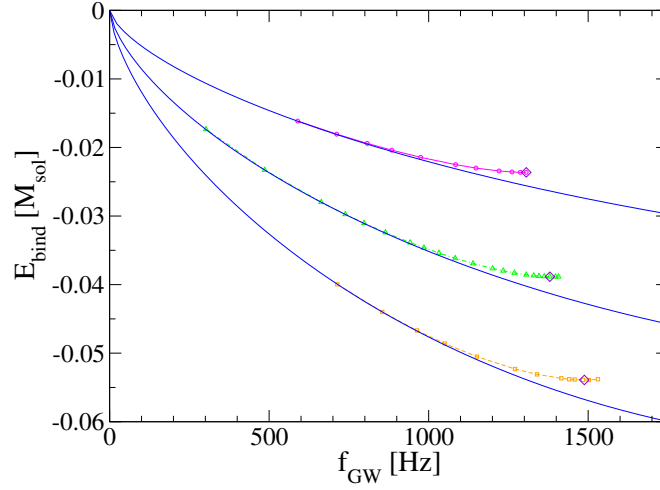


FIG. 7.7 – Orbital binding energy  $E_{\text{bind}}$  as a function of GW frequency  $f_{\text{GW}}$  along three different total mass evolutionary sequences of irrotational binaries described by SQSB60. The total mass in infinite separation of binaries containing two identical strange stars is 2, 2.7 and  $3.3 M_{\odot}$  from the top to the bottom respectively.

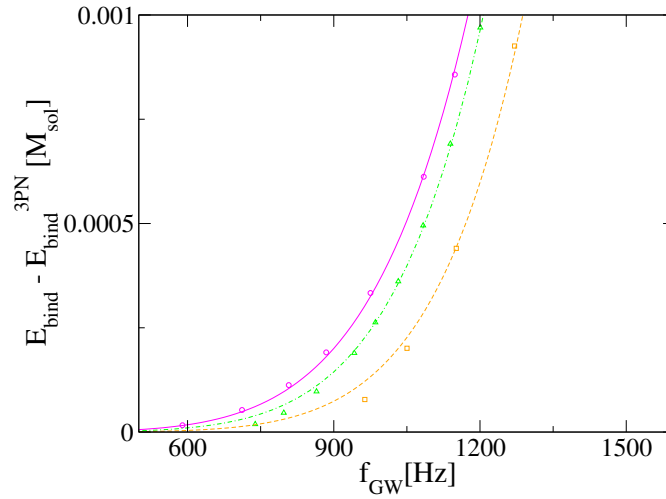


FIG. 7.8 – Difference  $E_{\text{bind}} - E_{\text{bind}}^{3\text{PN}}$  between the binding energy for three different total mass irrotational binaries build of strange quark matter described by SQSB60 and the binding energy of binary point masses in the 3PN approximation of Blanchet (2002) [21]. The symbols correspond to the numerical results and the lines to polynomial fits to them. The total mass of binaries containing two identical strange stars is 2, 2.7 and  $3.3 M_{\odot}$  from left to right respectively.

## 7.6. INFLUENCE OF THE MASS

EOS	$f_{\text{npm}}$	$f_{25}$	$f_{40}$	$f_{65}$	$f_{\text{ISCO/end}}$
SQSB40	542	679	871	1033	1134
SQSB60	705	744	1022	1245	1390
SQSB56	767	756	1063	1308	1467
DSQS	1825	786	1286	1945	2050

TAB. 7.3 – Gravitational wave frequencies (in Hz) at the last orbits of inspiraling equal-mass of  $1.35 M_{\odot}$  strange quark star binaries described by SQSB40, SQSB56, SQSB60 and DSQS models :  $f_{\text{npm}}$  denotes the frequency of GW at which the relative difference between binding energy calculated in quasi-equilibrium and 3PN approximation is higher than 0.1%,  $f_{25}$ ,  $f_{40}$  and  $f_{65}$  are the so-called break-frequencies at which the GW energy spectrum has dropped, respectively, by 25%, 40%, 65% and  $f_{\text{ISCO/end}}$  is the GW frequency at ISCO for SQSB40, SQSB56, SQSB60 model and at the last calculated configuration for DSQS model.

terminate at the dynamical instability. Fig. 7.7 also shows that for this EOS, the frequency of gravitational waves at the ISCO increase when the mass of the strange stars increase. We recover the same behavior for the frequency of departure from non-point-masses  $f_{\text{npm}}$ , as illustrated by Fig. 7.8 showing the polynomial fits Eq. (7.8) for these three evolutionary sequences.

Mass [ $M_{\odot}$ ]	$A$ [ $M_{\odot}$ ]	$n$	$f_{\text{npm}}$
1	0.0003781	6.02	593
1.35	0.0002888	6.59	705
1.65	0.0001590	7.27	838

TAB. 7.4 – Parameters  $A$  and  $n$  of polynomial fits (7.8) for different masses evolutionary sequences of strange stars described by SQSB60 model.

The same work is repeated for the two other EOS of MIT bag model, SQSB56 and SQSB40. Fig. 7.9 shows the frequency of GW at the ISCO versus the mass and versus the compaction parameter for masses from  $0.5M_{\odot}$  to  $1.65M_{\odot}$  for SQSB56 and SQSB60 and from  $0.5M_{\odot}$  to  $1.75M_{\odot}$  for SQSB40. Each point in this figure correspond to one evolutionary sequence for which we determine the location of the ISCO, beyond which the binary become dynamically instable. From Fig. 7.9, we see that for each of the EOS of MIT bag model, the frequency of GW at the ISCO increase with the mass of the stars. Because the dependence in the mass of the compaction parameter  $M/R$  is almost linear in this range of mass, the frequency of GW has a similar behavior with respect to the compaction parameter than with respect to the mass. We thus recover the same result, but for a different situation, than in Section 4 (in Sec. 4, the total mass was fixed and the compaction parameter was a function of the EOS, this is the opposite situation here, the EOS is fixed and the compaction parameter depends on the total mass) : the higher the compaction parameter is, the higher the frequency of GW at the ISCO.

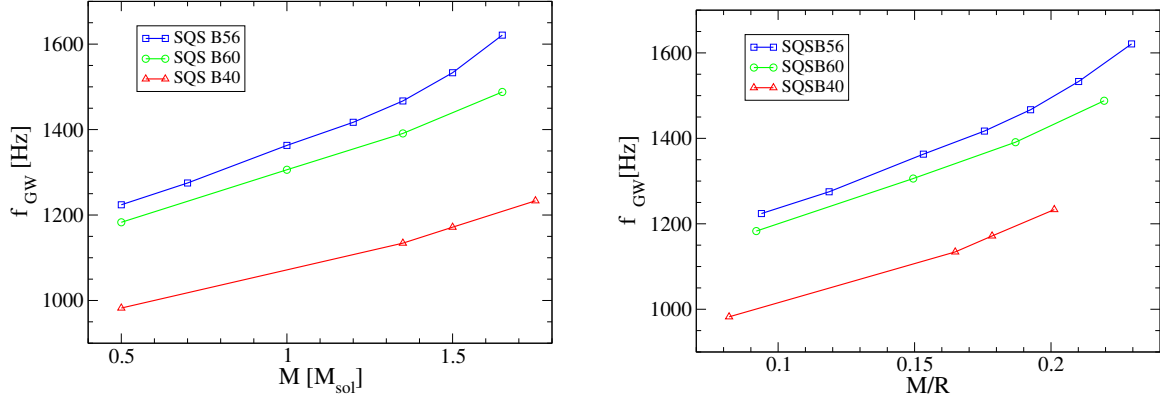


FIG. 7.9 – The left (right) panel corresponds to the dependence of gravitational wave frequency at the ISCO on gravitational mass (compactness parameter) of a star in isolation for equal-mass binaries described by different strange quark matter EOS

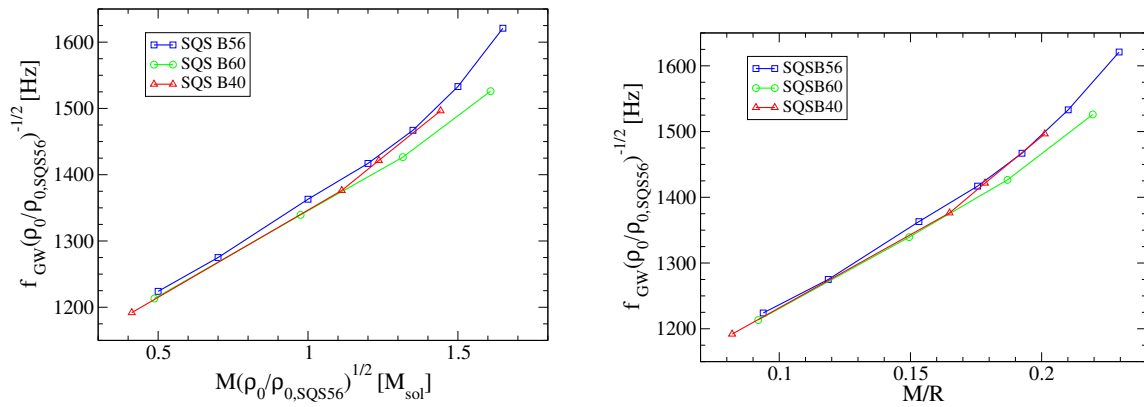


FIG. 7.10 – Left panel (right panel) represent the rescaled gravitational wave frequency at the ISCO as a function of the gravitational mass (compactness parameter) of a star in isolation.

## 7.7. CONCLUSION

---

It was already mention that strange stars described by different models of strange matter can be very well approximated by the linear function  $P = a(\rho - \rho_0)$ . In the case of MIT bag model EOS, both  $\rho_0$  and  $a$  are functions of the physical constants  $B$ ,  $m_s$  and  $\alpha$ . For a fixed value of  $a$ , all stellar parameters are subject to scaling relations with appropriate powers of  $\rho_0$ ,  $f \propto \rho_0^{1/2}$  and  $M, R \propto \rho_0^{-1/2}$  [152, 160].

Fig. 7.10 show the dependence of the frequency of GW at the ISCO versus mass and compaction parameter, the different quantities being scaled out with appropriate powers of  $\rho_0/\rho_{0,\text{SQSB56}}$ , where  $\rho_{0,\text{SQSB56}} = 4.4997 \text{ g/cm}^3$ . We see that the functions  $f_{\text{GW}}(M)$  and  $f_{\text{GW}}(M/R)$  weakly depends on  $a$ . The results obtained for one strange quark model can thus be translated for other models using the scaling with  $\rho_0$ .

## 7.7 Conclusion

In the present paper we have computed the final phase of inspiral of irrotational binary stars built predominantly of strange quark matter. We have studied the precoalescing stage within a quasi-equilibrium approximation (helical Killing vector approximation) and a conformally flat spatial 3-metric (Isenberg-Wilson-Mathews approximation of general relativity) using a multidomain spectral method. We have presented a set of evolutionary sequences of equal-mass strange star binaries based on two types of equation of state at zero temperature, the MIT bag model and the Dey et al. (1998) model, of strange quark matter. For each sequence we have computed the gravitational waves energy spectrum. We have compared our results with those obtained for neutron star binaries and the third order Post-Newtonian point-mass binaries. We have studied the impact of the equation of state and the total energy-mass on the last orbits of binary strange quark stars by finding the gravitational wave frequency at the ISCO, which marks the end of the inspiral phase, and the break frequencies (GW frequencies at which the energy spectrum drops by some factor below the point-mass result) for each evolutionary sequence. Those frequencies could be determined from data analysis and allow us to make constraints on the equation of state of neutron stars.

We find that :

i) for equal-mass irrotational strange quark star binaries ISCO is given by the orbital instability independently of the equation of state and the total energy-mass of a system. This contrasts with neutron stars described by nuclear equation of state for which the ISCO is given by mass-shedding-limit.

ii) for equal-mass evolutionary sequences of strange stars or neutron stars with fixed mass-energy, the dependence of the frequency of GW at the ISCO on the compactness parameter is a linear function. The higher the compactness of a star is, the higher the frequency of GW at the ISCO is. The frequency of GW at the end point of inspiraling neutron stars described by several realistic EOS can be predicted, in a good approximation, by studying binaries with assumed polytropic EOSs with  $\gamma = 2$  or  $2.5$  with the same compaction parameter. In contrast, the frequency of GW at the ISCO is always higher for strange stars binaries than for polytropic neutron stars binaries with the same compaction parameter. The differences in the evolution of binary strange stars and neutron stars stem from the fact that strange stars are principally bound

by an additional force, strong interaction between quarks.

iii) the gravitational wave frequency at the ISCO is always higher than 1.1kHz for equal masses irrotational strange quark stars described by MIT bag model and 2 kHz for the Dey et al. (1998) model with the total mass-energy of a binary system greater than  $2M_{\odot}$ .

iv) the range of GW frequencies, [1130, 1470], at the ISCO for binary strange stars of  $2.7M_{\odot}$  total mass, described by the MIT bag model intersects with the range of frequencies, [806, 1270], for binary neutron stars. The determination of the gravitational wave frequency at the ISCO by the laser interferometers wouldn't be sufficient to distinguish without ambiguities between strange stars and neutron stars. It would be necessary to take into account the observed deviation of the gravitational energy spectrum of a quasi-equilibrium sequence from point-mass behavior (the break frequencies). The fits of the deviation between numerical results from 3PN results show that the power  $n$  is very high, which indicates that high order tidal effects are very important. This is compatible with the results of [93], the lowest order tidal term is  $n = 4$ .

v) the higher the total mass of the system is, the higher the frequency of GW at ISCO is. For MIT bag model the frequency of gravitational waves at the ISCO only weakly depends on  $a$  parameter, especially for small compactness. The results obtained for one model can thus be used for other MIT bag model using the scaling with  $\rho_0$ .

In future work we plan to study binary neutron stars (strange quark stars) with different mass ratio, e.g. 0.7, following the results of [33] for the observability weighted distribution of double neutron star binaries as well as binary systems consisting of one strange star and one neutron star.

# Chapitre 8

## Étoiles à neutrons binaires : au delà de IWM

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction et motivation</b>	<b>128</b>
<b>8.2</b>	<b>Équations pour le champ gravitationnel</b>	<b>129</b>
8.2.1	Rappel Formalisme 3+1	129
8.2.2	Décomposition conforme	130
8.2.3	Équations d'Einstein en décomposition conforme	131
8.2.4	Définition des potentiels $h^{ij}$	132
8.2.5	Feuilletage maximal et jauge de Dirac	132
8.2.6	Système d'équations final	133
8.2.7	Approximation sans ondes	135
<b>8.3</b>	<b>Équations pour le fluide</b>	<b>136</b>
8.3.1	Conservation du tenseur énergie-impulsion	136
8.3.2	Expressions en jauge de Dirac et feuilletage maximal	136
<b>8.4</b>	<b>Méthodes de résolution</b>	<b>137</b>
8.4.1	Système complet	137
8.4.2	Méthodes numériques	137
8.4.3	Procédure itérative	139
<b>8.5</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>140</b>
8.5.1	Tests du code	140
8.5.2	Configuration irrotationnelle $M/R = 0.12$ , $d = 50$ km	141
8.5.3	Séquences de Quasi-équilibre	146
<b>8.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>152</b>
<b>8.7</b>	<b>Article soumis à Phys. Rev. Lett. (preprint, gr-qc/0511136)</b>	<b>153</b>

---

## 8.1 Introduction et motivation

La compréhension des phénomènes intervenant avec les binaires d'étoiles à neutrons est nécessaire à l'astronomie observationnelle, tant à l'astronomie des ondes gravitationnelles qu'à l'astronomie des ondes électromagnétiques de hautes énergies. En effet, les étoiles à neutrons binaires pourraient être une des classes de sursauts gamma, et elles sont également une des sources les plus importantes de rayonnement gravitationnel. La dernière phase de la spirale décrite par ces systèmes, qui émettent des ondes gravitationnelles de fréquence comprises entre  $\sim 10$  et  $\sim 1000$  Hz, est une des sources les plus prometteuses d'être observées par les détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles tels que LIGO, VIRGO, GEO et TAMA [90].

Pour des séparations orbitales  $d$  très grandes devant le rayon  $R$  de ces étoiles à neutrons, la vitesse orbitale est beaucoup plus faible que la vitesse de la lumière et les effets de taille finie des étoiles à neutrons peuvent être négligées. Ainsi, une approche post-Newtonienne supposant que les étoiles sont des particules ponctuelles est appropriée [22]. Cependant, pour  $d/R \lesssim 4$  et  $d \gtrsim 10M$  (on utilise, comme dans le reste du chapitre, des unités géométriques pour lesquelles  $G = c = 1$ ), une étude numérique est requise afin de prendre en compte les effets de déformation de marée de chaque étoile et les effets complets de la relativité générale. Néanmoins, même pour des orbites aussi proches, la rapport entre la vitesse d'approche orbitale et la vitesse orbitale est petite (moins de 1%) [128] et il est justifié de faire l'approximation de quasi-stationnarité et de considérer des orbites circulaires. Ces solutions numériques peuvent alors être employées comme données initiales pour des simulations numériques de la phase de coalescence et de fusion des étoiles [125, 127].

Afin de maintenir des orbites circulaires, il est nécessaire en relativité générale d'introduire une certaine approximation pour s'affranchir des effets de retour du rayonnement gravitationnel. Isenberg a proposé dans cet esprit une approximation sans ondes [87, 88] de la relativité générale, où le champ gravitationnel est calculé à partir d'un système tronqué des équations d'Einstein. Jusqu'à présent, la version de la théorie sans ondes la plus largement employée en relativité numérique pour étudier les binaires d'étoiles à neutrons en quasi-équilibre est la formulation Isenberg-Wilson-Mathews (IWM) [30, 72, 102, 134, 139, 141, 151], dans laquelle la métrique spatiale conforme est supposée être plate. La solution, dans cette formulation, satisfait les équations de contrainte de la relativité générale, et constitue donc une solution relativiste du problème des données initiales. Cependant, ce n'est qu'une solution de quasi-équilibre approché, car les parties non conformément plates de la métrique spatiale ne s'annulent pas pour des binaires en quasi-équilibre. La solution admet donc une erreur systématique. Plus précisément les parties non conformément plate de la 3-métrique sont de l'ordre de  $(M/d)^2$ , qui peut être  $\sim 0.1$  pour des orbites circulaires très proches [128].

Des formulations pour le calcul de binaires d'objets compacts en quasi-équilibre avec une 3-métrique non conformément plate ont été proposées par différents auteurs [4, 120, 129, 148]. Si l'on suppose l'existence d'un vecteur de Killing hélicoïdal, la solution contient des ondes gravitationnelles stationnaires dans tout l'espace-temps, résultant en un espace-temps non asymptotiquement plat. Pour remédier à ce problème, on doit introduire des approximations sur les dérivées temporelles des variables dynamiques [129]. Dans cette étude, nous utiliserons la formulation des équations d'Einstein introduite par Bonazzola *et al.* [27], et considérerons les

approximations proposées par Shibata *et al.* [129] pour garantir un espace-temps asymptotiquement sans ondes.

## 8.2 Équations pour le champ gravitationnel

### 8.2.1 Rappel Formalisme 3+1

On rappelle les différentes définitions introduites à la section 1.2 sur le Formalisme 3+1. La 1-forme  $\underline{n}$  est parallèle au gradient du champ scalaire  $t$  :

$$\underline{n} = -N dt, \quad (8.1)$$

le scalaire  $N$  étant la fonction lapse, assurant la normalisation de  $\underline{n}$ . On introduit un système de coordonnées  $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$  sur chaque hypersurface  $\Sigma_t$  qui varie continuellement d'une hypersurface à une autre, de telle sorte que  $(x^\alpha) = (t, x^1, x^2, x^3)$  soit un système de coordonnées sur  $\mathcal{M}$ . On note  $(\partial/\partial x^\alpha) = (\partial/\partial t, \partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2, \partial/\partial x^3)$  la base vectorielle naturelle associée au système de coordonnées. La décomposition 3+1 du vecteur temps-coordonnée s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} = N \underline{n} + \underline{\beta} \quad \text{avec} \quad \underline{n} \cdot \underline{\beta} = 0, \quad (8.2)$$

définissant le vecteur shift  $\underline{\beta}$  associé au système de coordonnées. On peut alors exprimer les composantes de la métrique  $\underline{g}$  en termes de la fonction lapse  $N$ , du vecteur shift  $\beta^i$  et de la métrique spatiale  $\gamma$  :

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt). \quad (8.3)$$

Par projection sur les hypersurfaces  $\Sigma_t$  et sur leurs normales  $\underline{n}$ , et en utilisant les relations de Gauss et de Codazzi, les équations d'Einstein sont équivalentes au système d'équations suivant

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E, \quad (8.4)$$

$$D^j K_{ij} - D_i K = 8\pi J_i, \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} = & -D_i D_j N + N \left\{ R_{ij} - 2K_{ik} K^k_j + K K_{ij} \right. \\ & \left. + 4\pi (S - E) \gamma_{ij} - 2S_{ij} \right\} + \mathcal{L}_\beta K_{ij}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

avec  $K_{ij}$  la courbure extrinsèque,  $R_{ij}$  le tenseur de Ricci associé avec la métrique spatiale  $\gamma$  et  $R$  sa trace. L'Eq. (8.4) est la contrainte hamiltonienne, l'Eq. (8.5) la contrainte impulsionnelle et l'Eq. (8.6) l'équation dynamique. A ces équations il convient d'ajouter l'équation d'évolution pour la métrique spatiale  $\gamma$ , qui n'est autre que la définition de la courbure extrinsèque

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = -2N K_{ij} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij}. \quad (8.7)$$



### 8.2.2 Décomposition conforme

Introduisons une métrique  $f$  sur les hypersurfaces  $\Sigma_t$  satisfaisant les propriétés suivantes : (i)  $f$  a un tenseur de Riemann nul, (ii)  $f$  ne varie pas d'une hypersurface à l'autre le long des lignes de coordonnées spatiales  $(\partial/\partial t)f_{ij} = 0$  et (iii) le comportement asymptotique de la métrique physique  $\gamma$  est donné par  $f$ ,  $\gamma_{ij} = f_{ij}$  à l'infini spatial. On note  $\mathcal{D}$  l'unique dérivée covariante associée à la métrique  $f$  :  $\mathcal{D}_k f_{ij} = 0$  et définissons

$$\mathcal{D}^i = f^{ij} \mathcal{D}_j. \quad (8.8)$$

Grâce à la métrique plate  $f$ , on peut définir la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$  de la façon suivante

$$\tilde{\gamma}_{ij} := \Psi^{-4} \gamma_{ij}, \quad (8.9)$$

où le facteur conforme  $\Psi$  est choisi comme

$$\Psi := \left( \frac{\gamma}{f} \right)^{1/12}, \quad (8.10)$$

$\gamma$  et  $f$  étant respectivement le déterminant de  $\gamma$  et le déterminant de  $f$  par rapport aux coordonnées  $(x^i)$ . Avec ce choix, le déterminant de  $\tilde{\gamma}$  est égal à  $f$ . Étant exprimé comme le quotient de deux déterminants,  $\Psi$  est un champ scalaire sur  $\Sigma_t$ . On définit ensuite la métrique conforme inverse en imposant

$$\tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}^{kj} = \delta_i^j, \quad (8.11)$$

ou d'une façon équivalente

$$\tilde{\gamma}^{ij} = \Psi^4 \gamma^{ij}. \quad (8.12)$$

On note  $\tilde{D}$  l'unique dérivée covariante associée à  $\tilde{\gamma}$  :  $\tilde{D}_k \tilde{\gamma}_{ij} = 0$ . On définit, dans le même esprit que l'équation (8.8),  $\tilde{D}^i := \tilde{\gamma}^{ij} \tilde{D}_j$ . Les dérivées covariantes  $\tilde{D}T$  et  $\mathcal{D}T$  d'un tenseur de type  $\binom{p}{q}$  sont reliés par la formule

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} &= \mathcal{D}_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{r=1}^p \Delta^r_{lk} T^{i_1 \dots l \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \\ &\quad - \sum_{r=1}^q \Delta^l_{jrk} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots l \dots j_q}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

où  $\Delta$  est le tenseur de type  $\binom{1}{2}$  donné par

$$\Delta^k_{ij} := \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} (\mathcal{D}_i \tilde{\gamma}_{lj} + \mathcal{D}_j \tilde{\gamma}_{il} - \mathcal{D}_l \tilde{\gamma}_{ij}). \quad (8.14)$$

A l'aide de ces définitions, la partie sans trace de la courbure extrinsèque est représentée par

$$A^{ij} := \Psi^4 \left( K^{ij} - \frac{1}{3} K \gamma^{ij} \right). \quad (8.15)$$

## 8.2. ÉQUATIONS POUR LE CHAMP GRAVITATIONNEL

Contrairement à la définition de  $A^{ij}$  dans la formulation BSSN [16, 124], cette quantité est ici un tenseur et non une densité de tenseur. En descendant les indices de  $A^{ij}$  avec la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$ , on définit le tenseur

$$\tilde{A}_{ij} := \tilde{\gamma}_{ik}\tilde{\gamma}_{jl}A^{kl} = \Psi^{-4} \left( K_{ij} - \frac{1}{3}K\gamma_{ij} \right). \quad (8.16)$$

Signalons que nous utilisons la même convention qu'au chapitre 1 pour le tenseur  $A^{ij}$ . Cependant  $\tilde{A}_{ij}$  correspond au  $A_{ij}$  du chapitre 1.

### 8.2.3 Équations d'Einstein en décomposition conforme

Tout d'abord explicitons les tenseurs et scalaires de Ricci apparaissant dans les équations d'Einstein (8.4) et (8.6). Le tenseur de Ricci  $\mathbf{R}$  formé à partir de la dérivée covariante  $\mathbf{D}$  associée à la métrique physique  $\gamma$  est relié au tenseur de Ricci  $\tilde{\mathbf{R}}$  formé à partir de la dérivée covariante  $\tilde{\mathbf{D}}$  associée à la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$  par [27]

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - 2\tilde{D}_i\tilde{D}_j\Phi + 4\tilde{D}_i\Phi\tilde{D}_j\Phi - 2\left(\tilde{D}^k\tilde{D}_k\Phi + 2\tilde{D}_k\Phi\tilde{D}^k\Phi\right)\tilde{\gamma}_{ij}, \quad (8.17)$$

où l'on a défini

$$\Phi := \ln \Psi. \quad (8.18)$$

La trace de l'équation (8.17) donne une expression du scalaire de Ricci  $R$  de la métrique physique en fonction du scalaire de courbure de la métrique conforme défini par  $\tilde{R} = \tilde{\gamma}^{ij}\tilde{R}_{ij}$  :

$$R = \Psi^{-4} \left( \tilde{R} - 8\tilde{D}_k\tilde{D}^k\Phi - 8\tilde{D}_k\Phi\tilde{D}^k\Phi \right), \quad (8.19)$$

À l'aide de cette dernière équation, la contrainte hamiltonienne (8.4) est réécrite sous la forme

$$\tilde{D}_k\tilde{D}^k\Phi + \tilde{D}_k\Phi\tilde{D}^k\Phi = \frac{\tilde{R}}{8} - \Psi^4 \left( 2\pi E + \frac{1}{8}\tilde{A}_{kl}A^{kl} - \frac{K^2}{12} \right). \quad (8.20)$$

La contrainte impulsionnelle (8.5) devient quand à elle

$$\tilde{D}_j A^{ij} + 6A^{ij}\tilde{D}_j\Phi - \frac{2}{3}\tilde{D}^i K = 8\pi\Psi^4 J^i. \quad (8.21)$$

La trace de l'équation dynamique (8.6) combinée avec la contrainte hamiltonienne (8.4) donne une équation d'évolution pour la trace de la courbure extrinsèque

$$\frac{\partial K}{\partial t} - \beta^k \tilde{D}_k K = -\Psi^{-4} \left( \tilde{D}_k \tilde{D}^k N + 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k N \right) + N \left[ 4\pi(E + S) + \tilde{A}_{kl}A^{kl} + \frac{K^2}{3} \right], \quad (8.22)$$

et la partie sans trace de l'équation (8.6) donne

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A^{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta A^{ij} - \frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k A^{ij} = & -\Psi^{-6} \left( \tilde{D}^i \tilde{D}^j Q - \frac{1}{3} \tilde{D}_k \tilde{D}^k Q \tilde{\gamma}^{ij} \right) \\
 & + \Psi^{-4} \left\{ N \left( \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \tilde{R}_{kl} + 8 \tilde{D}^i \Phi \tilde{D}^j \Phi \right) + 4 \left( \tilde{D}^i \Phi \tilde{D}^j N + \tilde{D}^j \Phi \tilde{D}^i N \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} \left[ N \left( \tilde{R} + 8 \tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \Phi \right) + 8 \tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k N \right] \tilde{\gamma}^{ij} \right\} \\
 & + N \left[ K A^{ij} + 2 \tilde{\gamma}_{kl} A^{ik} A^{jl} - 8\pi \left( \Psi^4 S^{ij} - \frac{1}{3} S \tilde{\gamma}^{ij} \right) \right], \tag{8.23}
 \end{aligned}$$

où l'on a introduit le champ scalaire

$$Q := \Psi^2 N. \tag{8.24}$$

$Q$  a la propriété de rassembler toutes les dérivées du second ordre de  $N$  et  $\Psi$  de l'équation (8.23). De plus, asymptotiquement,  $Q$  n'a aucun terme monopolaire (décroissant comme  $1/r$ ) dans le cas stationnaire [71].

La trace et la partie sans trace de la relation cinématique (8.7) entre  $K$  et  $\gamma$  donne

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta^k \tilde{D}_k \Psi + \frac{\Psi}{6} \left( \tilde{D}_k \beta^k - N K \right) \tag{8.25}$$

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}^{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta \tilde{\gamma}^{ij} - \frac{2}{3} \tilde{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}^{ij} = 2 N A^{ij}. \tag{8.26}$$

### 8.2.4 Définition des potentiels $h^{ij}$

Numériquement, nous ne résolvons pas pour la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$  mais pour la déviation  $h^{ij}$  de la métrique conforme inverse  $\tilde{\gamma}^{ij}$  par rapport à la métrique plate inverse  $f^{ij}$

$$\tilde{\gamma}^{ij} =: f^{ij} + h^{ij}. \tag{8.27}$$

La dérivée covariante plate de  $h^{ij}$  coïncide avec celle de  $\tilde{\gamma}^{ij}$  :  $\mathcal{D}_k \tilde{\gamma}^{ij} = \mathcal{D}_k h^{ij}$ . L'opérateur différentiel  $\tilde{D}_k \tilde{D}^k$  apparaissant dans les différentes équations d'Einstein de la section précédente est égal à  $\tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l + \mathcal{D}_k \tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_l$ . Grâce à la décomposition (8.27), on peut exprimer l'opérateur différentiel  $\tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l$  comme  $\tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l = \Delta + h^{kl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l$ , où  $\Delta$  est le laplacien associé avec la métrique plate  $\Delta = f^{kl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l = \mathcal{D}_k \mathcal{D}^k$ . Cette décomposition permet de résoudre numériquement pour un opérateur linéaire, le laplacien, les non linéarités étant traitées par les itérations.

### 8.2.5 Feuilletage maximal et jauge de Dirac

Avant d'explicitier le système d'équations à résoudre, il est nécessaire de faire un choix de coordonnées. En ce qui concerne le feuilletage des hypersurfaces  $\Sigma_t$ , nous choisissons le feuilletage maximal

$$K = 0. \tag{8.28}$$

## 8.2. ÉQUATIONS POUR LE CHAMP GRAVITATIONNEL

Pour les coordonnées spatiales  $(x^i)$  des hypersurfaces  $\Sigma_t$ , nous utilisons la jauge de Dirac généralisée définie par Bonazzola *et al.* [27]

$$\mathcal{D}_j \left[ \left( \frac{\gamma}{f} \right)^{1/3} \gamma^{ij} \right] = 0, \quad (8.29)$$

qui généralise la jauge de Dirac  $\partial_j(\gamma^{1/3}\gamma^{ij})$  à tout type de coordonnées. Puisque  $\mathcal{D}_j f^{ij} = 0$ , la condition (8.29) équivaut à une divergence plate des potentiels  $h^{ij}$  nulle :

$$\mathcal{D}_j h^{ij} = 0. \quad (8.30)$$

Le choix de la jauge de Dirac permet de simplifier remarquablement le tenseur de Ricci  $\tilde{R}$  associé à la métrique conforme. En effet, les termes du second ordre, c'est-à-dire linéaire en  $h^{ij}$ , se réduisent à un laplacien plat  $\Delta h^{ij}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \tilde{R}_{kl} &= \frac{1}{2} (\Delta h^{ij} - \mathcal{D}_l \tilde{\gamma}^{ik} \mathcal{D}_k \tilde{\gamma}^{jl} - \tilde{\gamma}_{kl} \tilde{\gamma}^{mn} \mathcal{D}_m \tilde{\gamma}^{ik} \mathcal{D}_n \tilde{\gamma}^{jl} + \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}_{ml} \mathcal{D}_k \tilde{\gamma}^{mn} \mathcal{D}_n \tilde{\gamma}^{jl} \\ &\quad + \tilde{\gamma}^{jl} \tilde{\gamma}_{kn} \mathcal{D}_l \tilde{\gamma}^{mn} \mathcal{D}_m \tilde{\gamma}^{ik} + \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \mathcal{D}_k \tilde{\gamma}_{mn} \mathcal{D}_l \tilde{\gamma}^{mn}) \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$= \frac{1}{2} \Delta h^{ij} + \tilde{R}_*^{ij}, \quad (8.32)$$

définissant  $\tilde{R}_*^{ij}$ . Quand au scalaire de courbure  $\tilde{R}$ , il n'est composé plus que de termes quadratiques :

$$\tilde{R} = \frac{1}{4} \tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_k \tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{D}_l \tilde{\gamma}_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_k \tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{D}_j \tilde{\gamma}_{il}. \quad (8.33)$$

### 8.2.6 Système d'équations final

En jauge de Dirac et feuilletage maximal, la combinaison (8.22) de la trace des équations d'Einstein dynamiques avec la contrainte hamiltonienne devient une équation elliptique pour  $\nu = \ln N$  :

$$\Delta \nu = \Psi^4 \left[ 4\pi(E + S) + \tilde{A}_{kl} A^{kl} \right] - \mathcal{D}_k \nu \mathcal{D}^k \nu - h^{kl} (\mathcal{D}_k \mathcal{D}_l \nu + \mathcal{D}_k \nu \mathcal{D}_l \nu) - 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \nu. \quad (8.34)$$

La combinaison de cette dernière équation avec la contrainte hamiltonienne (8.20) donne une équation pour la variable  $\Theta = \ln Q = \ln(\Psi^2 N)$  :

$$\begin{aligned} \Delta \Theta &= \Psi^4 \left[ 4\pi S + \frac{3}{4} \tilde{A}_{kl} A^{kl} \right] - \mathcal{D}_k \Theta \mathcal{D}^k \Theta + 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \Phi + 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \nu \\ &\quad + \frac{\tilde{R}}{4} - h^{kl} (\mathcal{D}_k \mathcal{D}_l \Theta + \mathcal{D}_k \Theta \mathcal{D}_l \Theta). \end{aligned} \quad (8.35)$$

En prenant la divergence plate de l'équation (8.26) et en utilisant le fait que  $\partial/\partial t$  commute avec  $\mathcal{D}_i$ , on obtient une équation pour la divergence de  $A^{ij}$ , qui injectée dans la contrainte

impulsionnelle (8.21) résulte en une équation pour le vecteur shift  $\beta$  :

$$\begin{aligned} \Delta\beta^i + \frac{1}{3}\mathcal{D}^i(\mathcal{D}_j\beta^j) &= 16\pi N\Psi^4 J^i + 2A^{ij}\mathcal{D}_j N - 12NA^{ij}\mathcal{D}_j\Phi - 2N\Delta^i{}_{kl}A^{kl} \\ &\quad - h^{kl}\mathcal{D}_k\mathcal{D}_l\beta^i - \frac{1}{3}h^{ik}\mathcal{D}_k\mathcal{D}_l\beta^l. \end{aligned} \quad (8.36)$$

Enfin, l'expression (8.32) du tenseur de Ricci permet de réécrire la partie sans trace des équations dynamiques (8.23) comme une équation elliptique pour les potentiels  $h^{ij}$  :

$$\Delta h^{ij} = (\mathcal{D}^i h^{jk} + \mathcal{D}^j h^{ik} - \mathcal{D}^k h^{ij}) \mathcal{D}_k \Theta - \frac{2\Psi^4}{N} \left( \mathcal{L}_\beta A^{ij} - \frac{\partial A^{ij}}{\partial t} + \frac{2}{3}\mathcal{D}_k \beta^k A^{ij} + \mathcal{S}^{ij} \right), \quad (8.37)$$

où  $\mathcal{S}^{ij}$  est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{ij} &= \Psi^{-4} \left\{ N \left( \tilde{R}_*^{ij} + 8\tilde{D}^i \Phi \tilde{D}^j \Phi \right) + 4 \left( \tilde{D}^i \Phi \tilde{D}^j N + \tilde{D}^j \Phi \tilde{D}^i N \right) - \frac{1}{3} \left[ N \left( \tilde{R}_* + 8\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \Phi \right) \tilde{\gamma}^{ij} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 8\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k N \tilde{\gamma}^{ij} \right] \right\} + 2N \left[ \tilde{\gamma}_{kl} A^{ik} A^{jl} - 4\pi \left( \Psi^4 \mathcal{S}^{ij} - \frac{1}{3} S \tilde{\gamma}^{ij} \right) \right] - \Psi^{-6} \left[ \tilde{\gamma}^{ik} \tilde{\gamma}^{jl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l Q \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (h^{ik} \mathcal{D}_k h^{lj} + h^{kj} \mathcal{D}_k h^{il} - h^{kl} \mathcal{D}_k h^{ij}) \mathcal{D}_l Q - \frac{1}{3} (\tilde{\gamma}^{kl} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l Q \tilde{\gamma}^{ij}) \right]. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Les équations (8.34), (8.35), (8.36) et (8.37) sont les équations elliptiques à résoudre pour les dix variables  $\nu = \ln N$ ,  $\Theta = \ln(\Psi^2 N)$ ,  $\beta^i$  et  $h^{ij}$ . Plus précisément, on compte onze variables mais seulement dix d'entre elles sont indépendantes car les potentiels  $h^{ij}$  sont contraints par l'équation  $\tilde{\gamma} = f$ . La résolution du système d'équations (8.34)-(8.37) demande la connaissance des différentes quantités apparaissant dans les sources des équations. La partie sans trace de la courbure extrinsèque  $A^{ij}$  est calculée à l'aide de la partie sans trace de la relation cinématique (8.26), que l'on réécrit à l'aide de l'opérateur  $(\tilde{L}\beta)^{ij} = \tilde{D}^i \beta^j + \tilde{D}^j \beta^i - \frac{2}{3}\tilde{D}_k \beta^k \tilde{\gamma}^{ij}$  :

$$A^{ij} = \frac{1}{2N} \left( (\tilde{L}\beta)^{ij} + \frac{\partial \tilde{\gamma}^{ij}}{\partial t} \right). \quad (8.39)$$

Le choix des dérivées temporelles  $\partial A^{ij}/\partial t$  de l'équation (8.37) et  $\partial \tilde{\gamma}^{ij}/\partial t$  de la précédente équation est discuté dans la section suivante.

La densité d'énergie  $E$ , la densité d'impulsion  $\mathbf{J}$  et le tenseur des contraintes  $\mathbf{S}$  sont donnés par

$$E = \Gamma_n^2 (e + p) - p \quad (8.40)$$

$$J^i = (E + p) U^i \quad (8.41)$$

$$S^{ij} = (E + p) U^i U^j + p \gamma^{ij} \quad \text{et} \quad S = S^k{}_k, \quad (8.42)$$

où  $U$  est la 3-vitesse du fluide par rapport à l'observateur eulérien. Le calcul de  $U$  et la présentation des équations pour le fluide est effectué par la suite dans la section 8.3.

### 8.2.7 Approximation sans ondes

Comme nous l'avons fait remarquer dans l'introduction, si l'on suppose que l'espace-temps admet une symétrie de Killing hélicoïdale, la solution contient des ondes gravitationnelles stationnaires dans tout l'espace-temps et la densité moyenne d'énergie des ondes gravitationnelles décroît comme  $1/r^2$ ,  $r$  étant une coordonnée radiale, résultant en un espace-temps non asymptotiquement plat. La masse de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) n'est alors pas bien définie et diverge. La solution obtenue n'est donc pas physique loin du système, bien qu'elle pourrait décrire un espace-temps réaliste d'étoiles à neutrons binaires près du système binaire.

Dans cette étude, on souhaite que l'espace-temps soit asymptotiquement plat donc on va devoir effectuer quelques approximations. Se basant sur Shibata *et al.* [129], on souhaite que les deux conditions suivantes soient satisfaites pour une solution et une séquence de solutions d'états de quasi-équilibre :

- une solution de quasi-équilibre stationnaire dans les coordonnées cotournantes doit satisfaire la relation du Viriel, donné par l'égalité

$$M_{\text{ADM}} = M_K, \quad (8.43)$$

où  $M_K$  est la masse de Komar. Les masses ADM et de Komar seront définies dans la section 8.5.3.1.

- Le long d'une séquence de solutions de quasi-équilibre – c'est-à-dire un ensemble de solutions de quasi-équilibre de paramètre la séparation entre les étoiles, imitant ainsi la phase de spirale d'un système binaire – la première loi de la thermodynamique des trous noirs doit être satisfaite. Elle peut s'écrire

$$\delta M_{\text{ADM}} = \Omega \delta J, \quad (8.44)$$

où  $\delta M_{\text{ADM}}$  et  $\delta J$  sont les différences infinitésimales de masse ADM et de moment cinétique le long d'une séquence de quasi-équilibre, et  $\Omega$  est la vitesse angulaire orbitale.

En imposant que ces deux conditions soient satisfaites, au moins approximativement, dans un espace-temps asymptotiquement plat, Shibata *et al.* [129] proposent une formulation dans laquelle on peut écrire les dérivées temporelles comme

$$\frac{\partial \tilde{\gamma}^{ij}}{\partial t} = \begin{cases} -\mathcal{L}_{\Omega \partial_\varphi} \tilde{\gamma}^{ij} & \text{pour } r \leq r_0 \\ 0 & \text{pour } r \geq r_0 \end{cases} \quad (8.45)$$

$$\frac{\partial A^{ij}}{\partial t} = \begin{cases} -\mathcal{L}_{\Omega \partial_\varphi} A^{ij} & \text{pour } r \leq r'_0 \\ 0 & \text{pour } r \geq r'_0, \end{cases} \quad (8.46)$$

où  $r_0$  et  $r'_0$  sont des rayons arbitraires et  $\varphi$  est la coordonnée azimutale d'un observateur inertiel. Ce choix est équivalent à considérer le vecteur de Killing hélicoïdal

$$\ell = \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (8.47)$$

en zone proche ( $r \leq r_0, r'_0$ ) et un vecteur de Killing purement temporel en zone externe. Un avantage de cette approche est que le membre de droite de l'équation elliptique pour  $h^{ij}$  (8.37) décroît maintenant comme  $O(r^{-4})$ , seul le terme  $\partial_t A^{ij}$  décroissait comme  $O(r^{-3})$ . Cela permet d'intégrer numériquement plus facilement cette équation.

## 8.3 Équations pour le fluide

### 8.3.1 Conservation du tenseur énergie-impulsion

Considérant un fluide parfait, le tenseur énergie-impulsion est donné par

$$\mathbf{T} = (e + p)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + pg, \quad (8.48)$$

$e$  étant la densité d'énergie propre du fluide,  $p$  sa pression et  $\mathbf{u}$  la 4-vitesse du fluide. Il s'agit d'une excellente approximation pour la matière d'une étoile à neutrons. La conservation du tenseur énergie impulsion  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$  donne lieu à deux équations. La première, valable aussi bien pour des écoulements rigides (corotation) ou irrotationnels, est la première intégrale du mouvement que l'on peut écrire sous la forme [72]

$$H + \nu - \ln \Gamma_0 + \ln \Gamma = \text{const}, \quad (8.49)$$

où l'on a défini  $H = \ln h$ ,  $h$  étant l'enthalpie spécifique du fluide.  $\Gamma_0$  est le facteur de Lorentz entre l'observateur cotournant et l'observateur eulérien et  $\Gamma$  est le facteur de Lorentz entre le fluide et l'observateur cotournant. Pour des étoiles en corotation, la 4-vitesse  $\mathbf{u}$  du fluide est égale à la 4-vitesse de l'observateur cotournant d'où  $\Gamma = 1$ .

La seconde équation est l'équation de conservation du nombre de baryons. Elle est trivialement satisfaite en rotation rigide en présence du vecteur de Killing  $\ell$  (Eq. (8.47)) [72]. Pour un écoulement irrotationnel, elle résulte en une équation pour le potentiel des vitesses  $\psi$ , défini par  $\mathbf{u} = \nabla \psi / h$ , qui s'écrit [72]

$$n D_k D^k \psi + D_k \psi D^k n = h \Gamma_n U_0^k D_k n + n \left( D_k \psi D^k \ln \frac{h}{N} + U_0^k D_k \Gamma_n \right) + n h K \Gamma_n, \quad (8.50)$$

où l'on note  $n$  la densité du nombre de baryons du fluide,  $\Gamma_n$  le facteur de Lorentz entre le fluide et l'observateur eulérien, et  $U_0^i$  la 3-vitesse orbitale par rapport à l'observateur eulérien. Quand à la 3-vitesse du fluide  $U^i$  apparaissant dans le calcul de la densité d'impulsion et le tenseur des contraintes, Eqs. (8.41) et (8.42), elle est donnée dans le cas irrotationnel par  $U^i = \gamma^{i\mu} u_\mu / \Gamma_n = D^i \psi / (\Gamma_n h)$ . Dans le cas corotationnel, on a simplement  $U^i = U_0^i$ .

### 8.3.2 Expressions en jauge de Dirac et feuilletage maximal

Considérons l'équation (8.50) de conservation du nombre de baryons pour un écoulement irrotationnel. Pour une équation d'état à température nulle,  $H$  est supposé n'être qu'une fonction du nombre de baryons  $n$ , d'où l'introduction du coefficient thermodynamique

$$\zeta = \frac{d \ln H}{d \ln n}. \quad (8.51)$$

En utilisant l'égalité suivante, valable en jauge de Dirac

$$\psi^4 D_i D^j \psi = \Delta \psi + 2 \tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{D}_i \phi \mathcal{D}_j \psi + h^{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \psi, \quad (8.52)$$

## 8.4. MÉTHODES DE RÉOLUTION

et en remplaçant les gradients de  $n$  par des gradients de  $H$  grâce à l'équation (8.51), l'équation de continuité (8.50) devient

$$\begin{aligned} \zeta H \Delta \psi + \mathcal{D}^i H \mathcal{D}_i \psi = & h \Gamma_n U_0^i \Psi^4 \mathcal{D}_i H + \zeta H \left[ \mathcal{D}_i \psi \mathcal{D}^i (H - \nu) \Psi^4 \right. \\ & \left. - 2 \tilde{\gamma}^{ij} \mathcal{D}_i \phi \mathcal{D}_j \psi + h U_0^i \Psi^4 \mathcal{D}_i \Gamma_n - h^{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \psi \right] - h^{ij} \mathcal{D}_i \psi \mathcal{D}_j H. \end{aligned} \quad (8.53)$$

Le potentiel  $\psi$  étant dominé par une partie purement de translation, on écrit, pour chaque étoile

$$\psi = \psi_0 + f_{ij} W_0^i x^j, \quad (8.54)$$

où  $W_0^i$  est un champ de vitesses constant défini comme la valeur au centre de l'étoile de

$$W^i = h \Gamma_n U_0^i \Psi^4. \quad (8.55)$$

Ainsi,  $\mathcal{D}^i \psi = \mathcal{D}^i \psi_0 + W_0^i$  et  $\Delta \psi = \Delta \psi_0$  et l'équation (8.53) devient

$$\begin{aligned} \zeta H \Delta \psi_0 + \left[ (1 - \zeta H) \mathcal{D}^i H + \zeta H \mathcal{D}^i \Theta \right] \mathcal{D}_i \psi_0 = & (W^i - W_0^i) \mathcal{D}_i H - h^{ij} \mathcal{D}_i \psi \mathcal{D}_j H \\ + \zeta H \left[ (W_0^i + h^{ij} \mathcal{D}_j \psi) \mathcal{D}_j (H - \Theta) + \frac{W^i}{\Gamma_n} \mathcal{D}_i \Gamma_n - h^{ij} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_j \psi \right]. \end{aligned} \quad (8.56)$$

## 8.4 Méthodes de résolution

### 8.4.1 Système complet

Les équations à résoudre pour un système binaire relativiste d'étoile à neutrons en quasi-équilibre sont les équations elliptiques (8.34)-(8.37) pour le champ gravitationnel, auxquelles on ajoute l'équation elliptique (8.56) pour le potentiel des vitesses  $\psi_0$  dans le cas de binaires irrotationnelles. Pour fermer le système d'équations, il est nécessaire de spécifier une équation d'état pour la matière. Partant d'une équation d'état polytropique

$$p = \kappa n^\gamma, \quad (8.57)$$

où  $\kappa$  et  $\gamma$  sont deux constantes, nous avons choisis  $\kappa = 0.0332 \rho_{\text{nuc}}^{-1} c^2$  ( $\rho_{\text{nuc}}$  étant la densité nucléaire  $\rho_{\text{nuc}} = 1.66 \times 10^{17} \text{ kg.m}^{-3}$ ) et  $\gamma = 2$ ,  $\gamma$  représentant la dureté de l'équation d'état.

Une fois l'équation d'état donnée, une configuration de quasi-équilibre d'étoiles à neutrons est complètement déterminée par la spécification de la distance coordonnée entre les étoiles et de la masse baryonique de chaque étoile. Une séquence d'évolution est obtenue en maintenant la masse baryonique constante, cette quantité étant conservée durant l'évolution d'un système binaire d'étoiles à neutrons, et en variant la séparation entre les étoiles.

### 8.4.2 Méthodes numériques

Les méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations elliptiques présentées ci-dessus sont similaires à celles utilisées dans Gourgoulhon *et al.* [72]. Les sources des équations



de Poisson étant principalement concentrées autour de chaque étoile (par exemple les termes de matière), on utilise deux systèmes de coordonnées chacun centré sur une des deux étoiles. On décompose les champs tensoriels sur une base cartésienne : un champ de vecteurs  $\vec{V}$ , par exemple, sera donnée par ses composantes cartésiennes  $(V_x, V_y, V_z)$ . Par contre chaque composante tensorielles est une fonction des coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  par rapport au centre d'une des étoiles. Les coordonnées de type sphérique assurent bien entendu une meilleure description des étoiles que des coordonnées cartésiennes.

Utilisant des méthodes spectrales pour résoudre les équations elliptiques (8.34)-(8.37) et (8.56), les différents champs sont donnés par leur expansion sur des bases de fonctions. On utilise les polynômes de Chebyshev pour les décompositions selon la coordonnée radiale  $r$  et les harmoniques sphériques ou des bases de cosinus-sinus pour les coordonnées angulaires  $\theta$  et  $\varphi$ . On utilise 33x21x20 coefficients spectraux pour les expansions selon  $r, \theta$  et  $\varphi$  respectivement.

Comme il est expliqué au chapitre 5 concernant les méthodes spectrales, l'espace est divisé, pour chaque système de coordonnées, en différents types de domaines : un noyau qui contient le centre d'une des étoiles, des coquilles sphériques et un domaine compactifié s'étendant jusqu'à  $r = +\infty$ . On utilisera typiquement 5 domaines (soit un noyau, 3 coquilles et un domaine compactifié) pour des étoiles assez éloignées et 4 domaines pour des étoiles proches. Utilisant deux systèmes de coordonnées, chacun centré sur le centre d'une étoile et décrivant tout l'espace, ils se recouvrent sur tout l'espace. La figure 8.1 est une illustration de décomposition multi-domaines d'un système binaire d'étoile à neutrons.

Les frontières des différents domaines peuvent s'adapter à la surface des étoiles. La surface des étoiles est située à une valeur constante de la coordonnée numérique  $\xi$  grâce au changement de variables  $(\xi, \theta', \varphi') \rightarrow (r, \theta, \varphi)$  défini au chapitre 5. Cela permet notamment d'éviter le phénomène de Gibbs spécifique aux méthodes spectrales en présence de discontinuités. Le fait que le domaine compactifié s'étende jusqu'à l'infini spatial assure que les conditions de bord externe que l'on imposent sont exactes. L'infini spatial est le seul endroit où l'on connaît la métrique, la métrique de Minkowski en l'occurrence, à l'avance.

Les sources des équations étant concentrées autour de chaque étoile, on décompose les équations (8.34)-(8.37) en deux parties, chacune étant centrée principalement autour d'une étoile et on résout en utilisant les coordonnées sphériques associées à cette étoile. Une équation du type  $\Delta F = S$  est donc décomposée en

$$\Delta F_1 = S_1 \quad (8.58)$$

$$\Delta F_2 = S_2, \quad (8.59)$$

avec  $F = F_1 + F_2$  et  $S = S_1 + S_2$ .  $S_a$ ,  $a = 1$  ou  $2$  est construit afin d'être concentré autour de l'étoile  $a$ , et ainsi bien décrit par les coordonnées associées à l'étoile  $a$ . Par exemple, l'équation elliptique pour  $\nu$  est écrite sous la forme

$$\begin{aligned} \Delta \nu_a = & \Psi^4 \left[ 4\pi(E_a + S_a) + \tilde{A}_{kl} A_a^{kl} \right] - \mathcal{D}_k \nu \mathcal{D}^k \nu_a \\ & - h^{kl} (\mathcal{D}_k \mathcal{D}_l \nu_a + \mathcal{D}_k \nu_a \mathcal{D}_l \nu) - 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \nu_a. \end{aligned} \quad (8.60)$$

où les champs avec un indice  $a$  représentent les champs principalement générés par l'étoile  $a$  et les champs sans indices sont les champs totaux. Par exemple  $\nu = \nu_1 + \nu_2$ ,  $\nu_a$  étant concentré

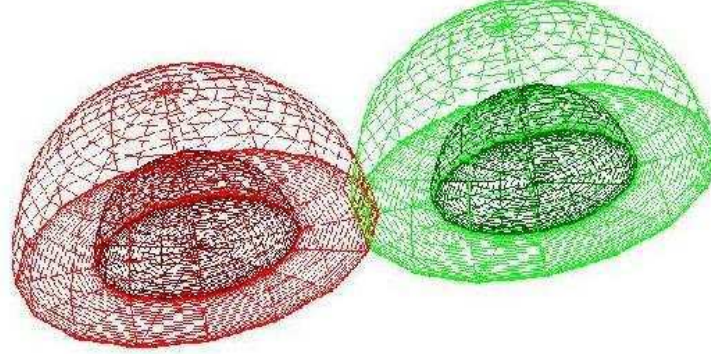


FIG. 8.1 – Domaines utilisés pour les calculs numériques. Sur cette figure, on représente 3 domaines centrés sur chaque étoile : un noyau, une coquille et un domaine compactifié. Les surfaces externes des deux premiers domaines sont représentées, la surface externe du domaine compactifié étant située à l’infini n’est bien entendu pas dessinée.

autour de l’étoile  $a$ . De la même manière,  $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2$ ,  $\beta^i = \beta_1^i + \beta_2^i$  et  $h^{ij} = h_1^{ij} + h_2^{ij}$ . Les équations (8.34)-(8.37) sont donc chacune données par la somme de deux équations pour  $a = 1$  et  $a = 2$ . On pourra se référer à Gourgoulhon *et al.* [72] pour plus de détails.

### 8.4.3 Procédure itérative

On utilise comme conditions initiales les solutions numériques pour des étoiles à neutrons isolées, statiques et à symétrie sphérique. On initialise donc les scalaires  $\nu_a$  et  $\Theta_a$ ,  $a = 1$  ou  $2$ , aux valeurs de  $\nu$  et  $\Theta$  de ces modèles à symétrie sphérique. Quand au shift  $\beta_a^i$ , il est initialisé à la valeur du premier ordre Post-Newtonian pour des binaires sphériques et incompressibles (voir [72] pour des détails et formules). On initialise la métrique conforme spatiale à la métrique plate c’est-à-dire que les potentiels  $h_a^{ij}$  sont initialement nuls. A l’aide des valeurs de tous ces champs métriques, on obtient la valeur initiale de la courbure extrinsèque.

La vitesse angulaire  $\Omega$  est fixée à une formule du second ordre Post-Newtonien pour des étoiles sphériques [23, 72]. Les différentes quantités fluides et les facteurs de Lorentz peuvent alors être déterminés, tout en supposant que le potentiel  $\psi_0$  apparaissant dans l’équation (8.54) est nul initialement. On obtient ensuite les valeurs initiales de la densité d’énergie  $E$ , de la densité d’impulsion  $J^i$  et du tenseur des contraintes  $S^{ij}$  via les équations (8.40) à (8.42).

Une fois les conditions initiales données, on effectue à chaque pas de l’itération les opérations suivantes :

- on détermine tout d’abord la valeur de la vitesse orbitale  $\Omega$  en prenant le gradient selon  $x$  de la première intégrale du mouvement (8.49), où l’on a défini le système de coordonnées  $(x, y, z)$  tel que le plan orbital est défini par  $z = 0$ , les centres des deux étoiles sont situés sur l’axe des  $x$  et l’axe de rotation est situé en  $x = 0, y = 0$ . On note  $x_a$ ,  $a = 1$  ou  $2$  la coordonnée selon  $x$  du centre des étoiles (pour des étoiles de masses identiques on a

$x_1 = -x_2$ ). Demander que l'enthalpie  $H$  soit maximale au centre de chaque étoile (notre définition du centre) résulte en une équation pour chaque étoile

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma_0 \right|_{(x_a, 0, 0)} = \left. \frac{\partial}{\partial x} (\nu + \ln \Gamma) \right|_{(x_a, 0, 0)}, \quad (8.61)$$

où  $\ln \Gamma_0$  est exprimé en fonction de  $\Omega$  par [72]

$$\ln \Gamma_0 = (1 - \gamma_{ij} U_0^i U_0^j)^{-1/2} = \left( 1 - \frac{\gamma_{ij}}{N^2} (\beta^i + \Omega \partial_\varphi^i) (\beta^j + \Omega \partial_\varphi^j) \right)^{-1/2}. \quad (8.62)$$

En évaluant cette relation au centre des étoiles et en l'insérant dans l'équation (8.61), on obtient une équation pour la vitesse orbitale  $\Omega$ , qui est résolue par une méthode de Newton.

On en déduit alors la valeur de 3-vitesse orbitale  $U_0$  puis les facteurs de Lorentz, en utilisant les valeurs du pas précédent des différents champs métriques et du potentiel  $\psi_0$ . Puis on résout l'équation elliptique (8.56) pour  $\psi_0$  en utilisant la méthode numérique décrite dans [72].

- on effectue, pour chaque jeu de coordonnées, l'adaptation de la frontière externe du premier domaine, le noyau, avec la surface de l'étoile. Pour cela, on utilise à nouveau la première intégrale du mouvement (8.49) pour déterminer l'ensemble des points où l'enthalpie  $H$  s'annule.
- on calcule alors les valeurs de la densité d'énergie  $E$ , de la densité d'impulsion  $J^i$  et du tenseur des contraintes  $S^{ij}$  via les équations (8.40) à (8.42), puis les sources des équations de Poisson (8.34)-(8.37). Ces équations de Poisson sont alors résolues grâce aux solveurs multi-domaines d'équations de Poisson scalaires et vectorielles pour des sources non-compactes décrites dans [28, 75].

## 8.5 Résultats numériques

### 8.5.1 Tests du code

Un test logique consiste à retrouver les solutions de binaires d'étoiles à neutrons dans l'approximation Isenberg-Wilson-Mathews. Pour cela, nous avons calculé des séquences de binaires irrotationnelles et corotationnelles en quasi-équilibre en forçant les potentiels  $h^{ij}$  à 0 afin d'imposer une métrique conformément plate. Pour des étoiles de compacité  $M/R = 0.12$  et  $M/R = 0.16$ , où  $M$  et  $R$  sont respectivement la masse et le rayon d'étoiles à neutrons statiques et isolées, nous retrouvons les résultats présentés dans Taniguchi & Gourgoulhon [133]. Nous obtenons notamment une vitesse angulaire, masse ADM et moment cinétique du système très proches, et avec une précision, donnée par le théorème du Viriel, équivalente. Ce n'est pas très étonnant sachant que, bien que s'agissant de codes différents, ils sont construits tous les deux à partir de la bibliothèque *LORENE* [98] et utilisent notamment les mêmes solveurs pour les équations de Poisson [75].

Jusqu'à présent, aucun résultat numérique de binaires d'étoiles à neutrons en quasi-équilibre prenant en compte une métrique plus générale n'a été publié et il est donc difficile de tester le

code au delà du conformément plat. Cependant, K. Uryu à réalisé en parallèle avec nous un code basé sur des méthodes aux différences finies et utilisant les mêmes jauges et approximations que nous pour traiter le problème. Le meilleur test est donc de comparer les résultats obtenus par ces deux codes, ce qui est fait dans Uryu *et al.* [140]

### 8.5.2 Configuration irrotationnelle $M/R = 0.12$ , $d = 50$ km

Considérons une configuration de binaire d'étoiles à neutrons irrotationnelles, d'équation d'état donnée par (8.57) avec  $\gamma = 2$ . Nous utilisons  $\kappa = 0.0332 \rho_{\text{nuc}}^{-1} c^2$  et considérons un paramètre de compacité  $M/R = 0.12$  pour des étoiles infiniment séparées. Cela résulte en une masse baryonique  $M_B = 1.44415 M_\odot$  et une masse gravitationnelle  $M_G = 1.35918 M_\odot$ . Pour une séparation  $d = 50$  km entre les deux étoiles, on prend 5 domaines chacun décrit par  $33 \times 21 \times 20$  points de collocation en  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  respectivement, et ce pour chaque système de coordonnées centré sur les étoiles.

On note  $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$  et  $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$  les systèmes de coordonnées centrés respectivement sur l'étoile 1 et 2.  $(x, y, z)$  et  $(r, \theta, \varphi)$  sont les coordonnées cartésiennes et sphériques centrés sur le centre O du système, O étant l'intersection entre le plan orbital et l'axe de rotation.

#### 8.5.2.1 Influence du rayon de troncature $r_0$

Étudions l'influence du choix du rayon  $r_0$  à partir duquel on tronque les dérivées temporelles  $\partial_t A^{ij}$  et  $\partial_t \tilde{\gamma}^{ij}$  (Cf. Eqs. (8.45) et (8.46)). Commençons par le terme  $\partial_t A^{ij}$ , intervenant dans l'équation de Poisson (8.37) pour les potentiels  $h^{ij}$ . Nous avons calculé la configuration mentionnée ci-dessus en tronquant la dérivée temporelle de la partie sans trace de la courbure extrinsèque dans successivement 5 domaines (c'est-à-dire  $\partial_t A^{ij} = 0$  dans tout l'espace), puis 4, 3, 2 et enfin un seul domaine. Pour permettre de choisir un rayon de troncature  $r_0$  plus grand, introduisons la fonction

$$f(r) = \begin{cases} 1 & \text{dans les quatre premiers domaines} \\ e^{(r-R_5)^2/\sigma^2} & \text{dans le domaine compactifié} \end{cases} \quad (8.63)$$

où  $r$  correspond soit à  $r_1$  ou  $r_2$  et  $R_5$  est le rayon interne du domaine compactifié. Cette fonction est appropriée car elle est  $C^\infty$  dans le domaine compactifié, elle tend vers 0 à l'infini et vers 1 en  $r = R_5$ . On considère alors également des configurations avec  $\partial_t A^{ij} = -f(r) \mathcal{L}_{\Omega \partial_\varphi} A^{ij}$  pour  $\sigma = R_5, 2R_5$  et  $3R_5$ . La figure 8.2 représente l'allure suivant l'axe  $x$  des potentiels  $h_{xx}$  et  $h_{yy}$  définis par

$$h_{ij} = \tilde{\gamma}_{ij} - f_{ij}. \quad (8.64)$$

Remarquons que l'on choisit de représenter les composantes  $h_{ij}$  et non  $h^{ij}$  par souci de clarté, la comparaison avec les résultats de K. Uryu étant réalisée sur les  $h_{ij}$  (section 8.7). De plus, sachant que  $h_{ij} = o(1)$ , on a  $h^{ij} = -h_{ij} + o(h^2)$ , donc l'allure des potentiels  $h^{ij}$  est similaire à celle de  $h_{ij}$ .

La figure 8.2 montre très clairement qu'un bon choix du rayon de troncature est fondamental. En effet, l'amplitude des composantes  $h_{xx}$  et  $h_{yy}$  est fortement dépendante du rayon  $r_0$  et décroît quand ce rayon augmente. Cependant, il semble qu'à partir d'une certaine valeur de  $r_0$ ,

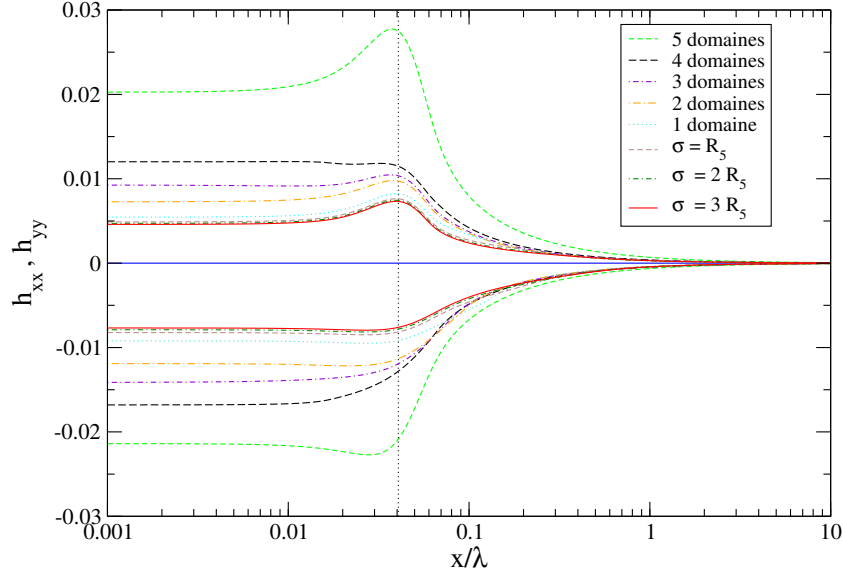


FIG. 8.2 – Profils des potentiels  $h_{xx}$  et  $h_{yy}$  selon l'axe  $x$  (normalisé par  $\lambda := \pi/\Omega$ ) pour différentes valeurs du rayon de troncature  $r_0$  pour la dérivée temporelle  $\partial_t A^{ij}$ . Les courbes au dessous de 0 correspondent à  $h_{xx}$  et celles au dessus à  $h_{yy}$ .

ces composantes de  $h_{ij}$  convergent et il paraît raisonnable de choisir de calculer les configurations avec  $\sigma = 3R_5$ . Pour compléter cette étude, nous donnons dans le tableau 8.1 les valeurs de la masse ADM, du moment cinétique total  $J$  et de l'erreur du viriel donnée par [134]

$$VE = \frac{|M_{\text{ADM}} - M_K|}{M_{\text{ADM}}}. \quad (8.65)$$

On peut en conclure que la masse ADM décroît et tend de plus en plus vers la valeur de la masse ADM dans l'approximation IWM,  $M_{\text{ADM, IWM}} = 2.69486M_\odot$ , lorsque le rayon de troncature augmente. De même que pour les composantes  $h_{ij}$ , les valeurs de la masse ADM et du moment cinétique convergent. Quand au Viriel, il devient de mieux en mieux vérifié à mesure que  $r_0$  augmente, et atteint un seuil de l'ordre de  $10^{-5}$ .

En ce qui concerne la dérivée temporelle de la métrique conforme, apparaissant dans le calcul de la partie sans trace de la courbure extrinsèque (8.39), on ne retrouve pas une influence aussi importante du rayon de troncature. Les profils des potentiels  $h_{ij}$ , la masse ADM, le moment cinétique ainsi que l'erreur du viriel dépend très faiblement du rayon à partir duquel  $\partial_t \tilde{\gamma}^{ij} = 0$ .

Dans toute la suite, chaque configuration sera calculée avec une troncation de  $\partial_t A^{ij}$  utilisant la fonction (8.63) avec  $\sigma$  égal à trois fois la valeur du rayon interne du domaine compactifié, et la dérivée temporelle de  $\tilde{\gamma}^{ij}$  tronquée dans tout l'espace,  $\partial_t \tilde{\gamma}^{ij} = 0$ .

## 8.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Troncature	$M_{\text{ADM}} [M_{\odot}]$	$J [M_{\odot}^2]$	VE
5 domaines	2.70763	7.8194	6.074e-04
4 domaines	2.70377	7.7585	3.472e-04
3 domaines	2.69905	7.7127	1.681e-04
2 domaines	2.69716	7.6891	6.588e-05
1 domaine	2.69614	7.6707	1.912e-05
$\sigma = R_5$	2.69538	7.6738	7.109e-06
$\sigma = 2R_5$	2.69519	7.6745	8.761e-06
$\sigma = 3R_5$	2.69517	7.6744	1.133e-05

TAB. 8.1 – Valeur de la masse ADM, du moment cinétique et de l’erreur du viriel en fonction du rayon de troncature  $r_0$  pour la dérivée temporelle  $\partial_t A^{ij}$ .

### 8.5.2.2 Isocontours et profils des quantités métriques

Nous résolvons les équations elliptiques (8.34)-(8.37) pour les champs  $\Psi$ ,  $N$ ,  $\beta$  et  $h^{ij}$  sans imposer que la métrique conforme à un déterminant un, c’est-à-dire que l’on résout les six équations elliptiques pour les potentiels  $h^{ij}$ , alors que seulement cinq sont indépendantes. Cependant, on vérifie que l’on obtient à la fin de l’itération  $\tilde{\gamma} = 1 \pm 0.0001$ , ce qui constitue entre autre un bon test du code.

Les différents isocontours des potentiels  $h_{ij}$  sont représentés sur la figure 8.3 pour les composantes diagonales dans le plan (xy), sur la figure 8.4 pour les composantes diagonales dans le plan (xz) et sur la figure 8.5 pour les composantes non diagonales. Signalons que nous notons, pour simplifier, (xy), par exemple, le plan (Oxy). Pour des raisons de symétrie, les composantes  $h_{xy}$ ,  $h_{xz}$  et  $h_{yz}$  sont respectivement non nulles uniquement sur les plans (xy), (xz) et (yz). On n’a pas représenté la composante  $h_{xz}$  dans le plan (xz) car son amplitude est de l’ordre de  $10^4$  fois plus faible que les autres composantes et elle est fortement bruitée.

Tous ces isocontours sont en excellent accord avec ceux obtenus à l’aide du code développé par K. Uryu [140]. Ils sont également en bon accord avec les résultats post-newtoniens à l’ordre 2PN obtenus par Asada *et al.* [7]. On peut remarquer, notamment sur l’isocontour de  $h_{yy}$  dans le plan (xy), que le comportement asymptotique de ces différents potentiels dépend des variables angulaires  $\theta$  et  $\varphi$ .

Sur la figure 8.6, on montre les isocontours du logarithme du lapse  $\nu$ , du vecteur shift  $\beta$  et du logarithme du facteur conforme  $\ln \Psi$  dans le plan orbital (xy). On peut remarquer que ces isocontours sont très similaires à ceux obtenus dans l’approximation IWM (voir par exemple [72]). Il en est de même pour les différents isocontours de la courbure extrinsèque, qui ne sont donc pas représentés ici.

La figure 8.7 montre l’isocontour de la densité baryonique ainsi que les champs de vitesse du fluide dans le référentiel cotournant et dans le référentiel inertiel. Notons que, comme il se doit, le champ de vitesse du fluide en coordonnées cotournantes est tangent aux surfaces des étoiles. En coordonnées inertielles, on vérifie que les étoiles sont irrotationnelles, le champ de vecteurs étant constant dans toute l’étoile.

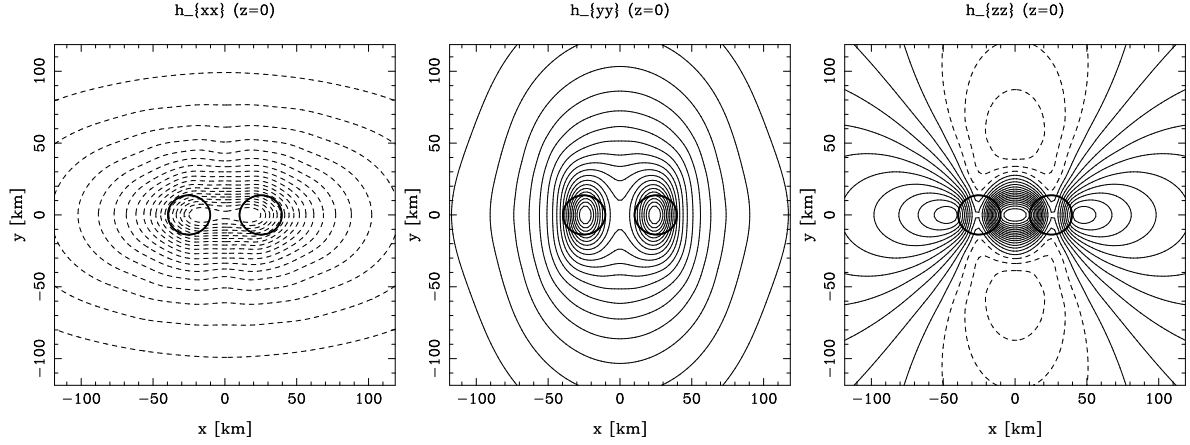


FIG. 8.3 – Isocontours de  $h_{xx}$ ,  $h_{yy}$  et  $h_{zz}$  dans le plan (xy). Les traits gras indiquent le contour des étoiles. Les traits pleins représentent des champs de valeur positives tandis que les traits en pointillés représentent des champs de valeur négative.

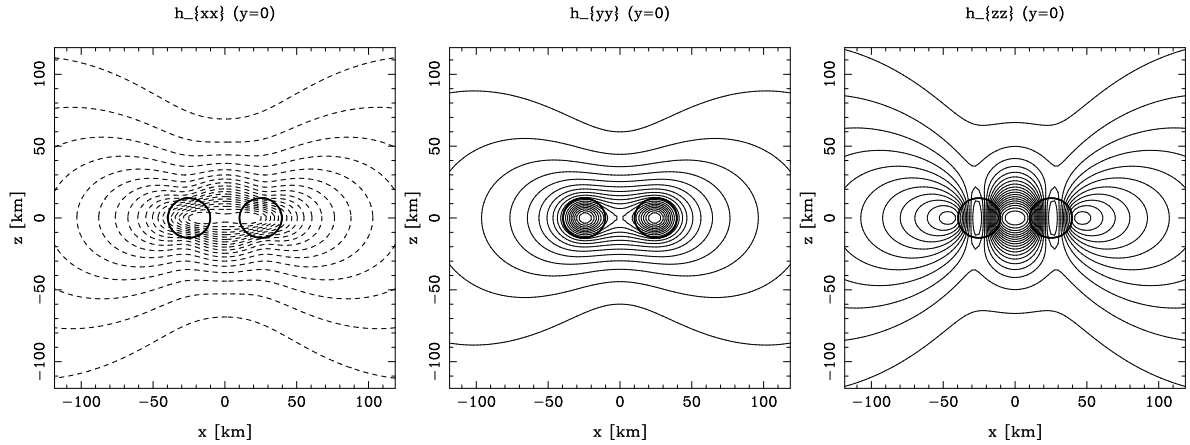


FIG. 8.4 – Isocontours de  $h_{xx}$ ,  $h_{yy}$  et  $h_{zz}$  dans le plan (xz). Les traits gras indiquent le contour des étoiles. Les traits pleins représentent des champs de valeur positives tandis que les traits en pointillés représentent des champs de valeur négative.

## 8.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

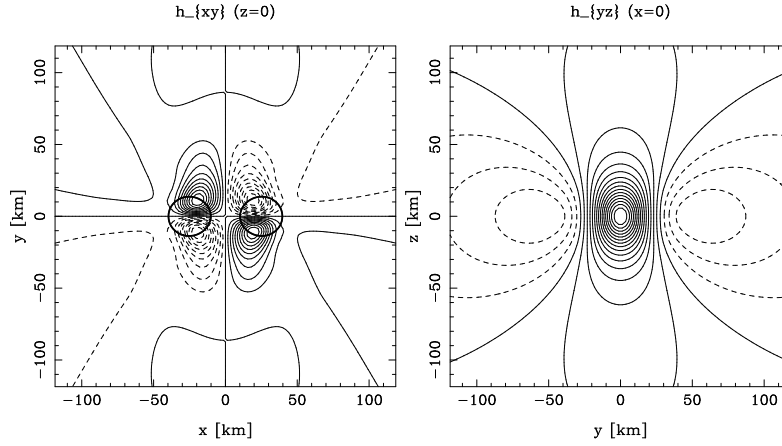


FIG. 8.5 – Isocontours de  $h_{xy}$  dans le plan (xy) et de  $h_{yz}$  dans le plan (yz). Les traits gras indiquent le contour des étoiles. Les traits pleins représentent des champs de valeur positives tandis que les traits en pointillés représentent des champs de valeur négative.

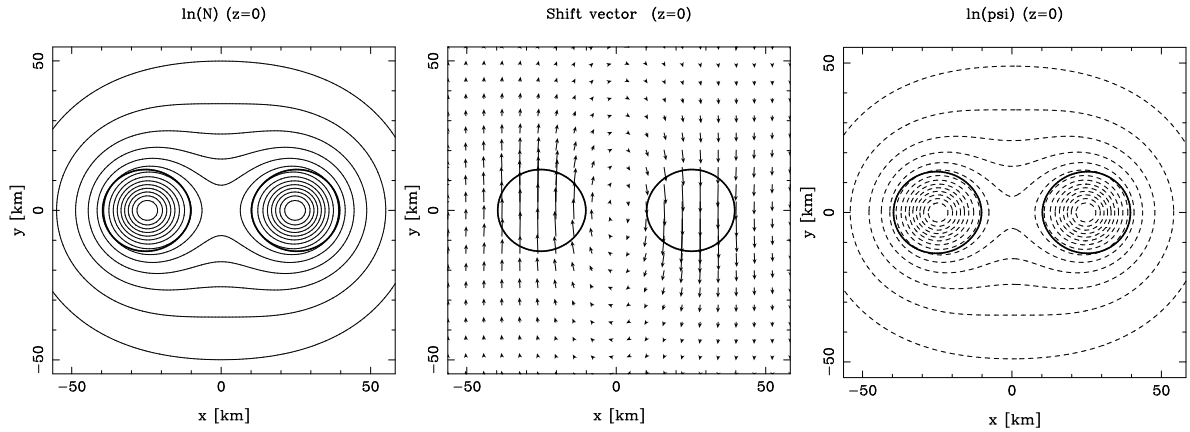


FIG. 8.6 – Isocontours du lapse  $\nu$ , du vecteur shift  $\beta$  et du facteur conforme  $\ln\Psi$  dans le plan (xy). Les traits gras indiquent le contour des étoiles. Les traits pleins représentent des champs de valeur positives tandis que les traits en pointillés représentent des champs de valeur négative.



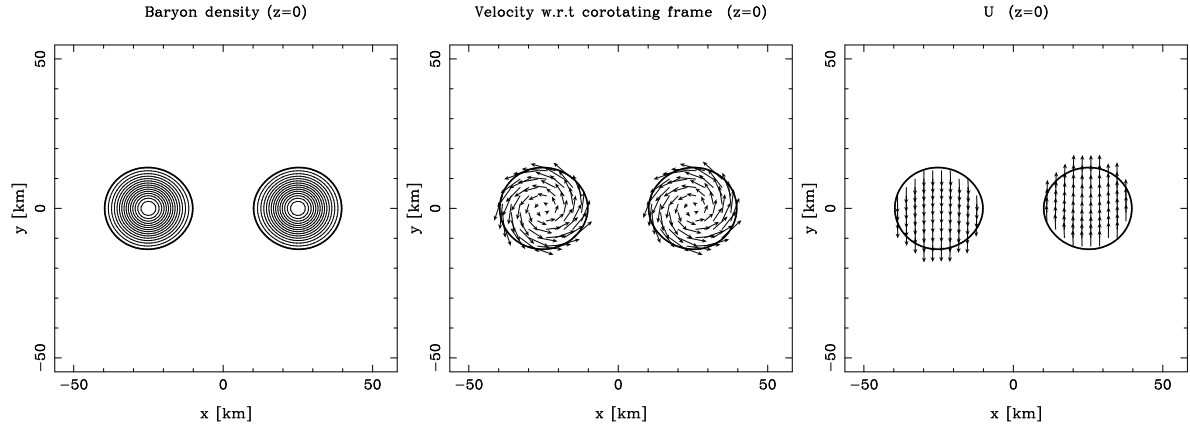


FIG. 8.7 – Isocontours de la densité baryonique et vitesse du fluide en coordonnées cotournantes puis inertielles, dans le plan  $(xy)$ . Les traits gras indiquent le contour des étoiles. Les traits pleins représentent des champs de valeur positives tandis que les traits en pointillés représentent des champs de valeur négative.

La figure 8.8 représente les profils des composantes  $h_{ij}$  le long des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . La position du centre de l'étoile  $y$  est repéré par la ligne verticale en pointillés. On remarque que l'amplitude des différents  $h_{ij}$  est relativement faible ( $\leq 0.01$ ) mais il est à noter que le paramètre de compacité choisi  $M/R = 0.12$  est relativement petit. Comme on le verra, l'amplitude sera plus importante pour  $M/R = 0.17$ . De plus, la distance entre les étoiles est encore assez grande devant la distance limite de perte de masse ( $\sim 41.5$  km dans l'approximation IWM) et l'amplitude des potentiels  $h_{ij}$  croît lorsque la distance diminue (voir figure 8.9).

### 8.5.3 Séquences de Quasi-équilibre

Pour chaque paramètre de compacité  $M/R = 0.12$  et  $M/R = 0.17$ , nous avons construit une séquence d'évolution, c'est-à-dire une séquence de configurations quasi-stationnaires de masse baryonique fixée et de séparation décroissante. Le tableau 8.2 résume les masses et rayon stellaires pour des étoiles isolées ainsi que la masse baryonique obtenue pour les deux compacités considérées. On s'attend à ce qu'une telle séquence approxime relativement bien une vraie évolution si l'hypothèse d'orbites circulaires est justifiée. Cette hypothèse est valable tant que la vitesse radiale des étoiles est très faible devant la vitesse orbitale, sachant que l'émission d'ondes gravitationnelles tend à circulariser les orbites.

On représente sur la figure 8.9 la dépendance du profil des composantes  $h_{xx}$  et  $h_{yy}$  selon l'axe  $x$  en fonction de la séparation coordonnée  $d$  entre les étoiles à neutrons. Comme on l'a déjà signalé, l'amplitude de ces composantes augmente lorsque la séparation diminue, mais les profils conservent la même forme quelle que soit cette séparation. Notons que le centre des étoiles est grossièrement repéré par le maximum de  $h_{yy}$  le long de l'axe  $x$ .

Définissons à présent les quantités globales, la masse ADM, la masse de Komar et le moment cinétique total, qui nous sont nécessaires pour décrire plus précisément les séquences

## 8.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

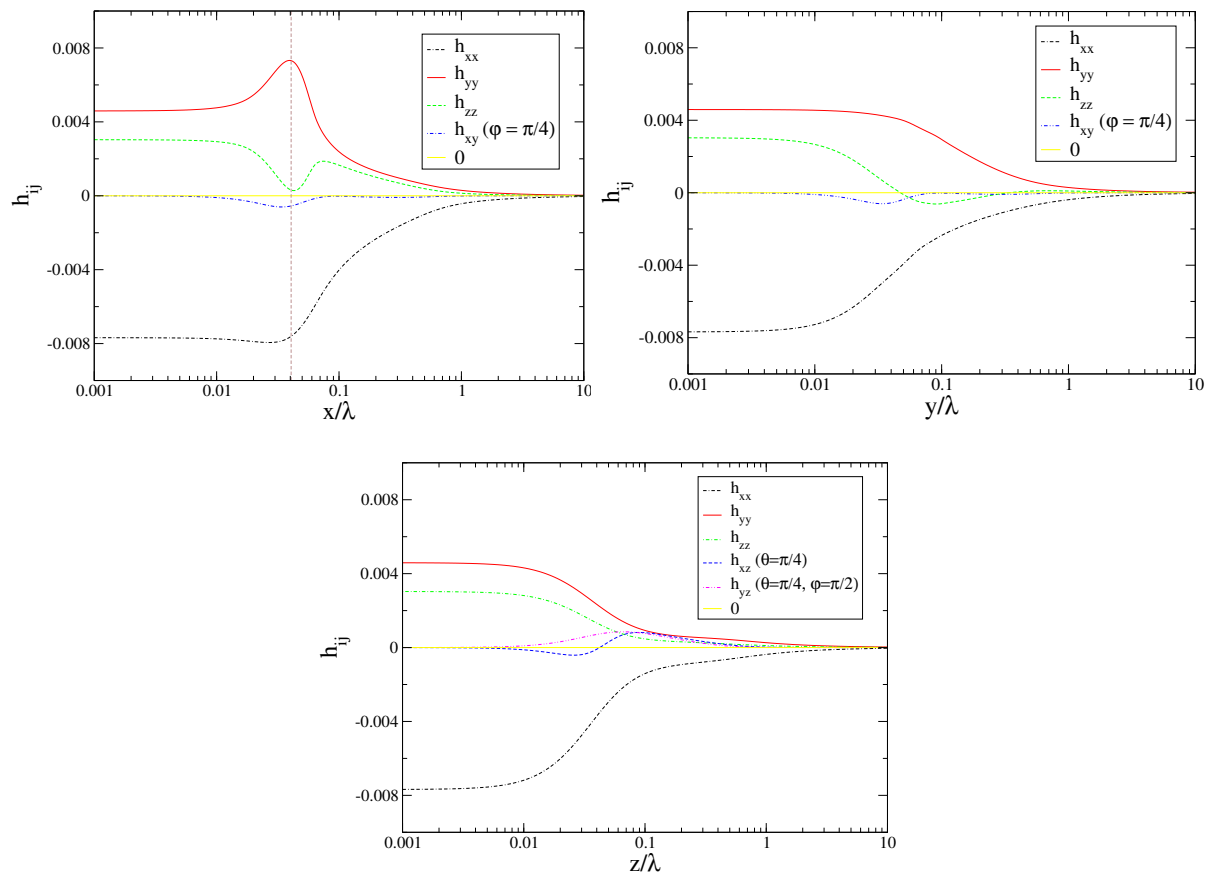


FIG. 8.8 – Allure des différentes composantes de  $h_{ij}$  le long des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  normalisés par  $\lambda := \pi/\Omega$ . La ligne verticale en pointillés représente la position du centre de l'étoile.

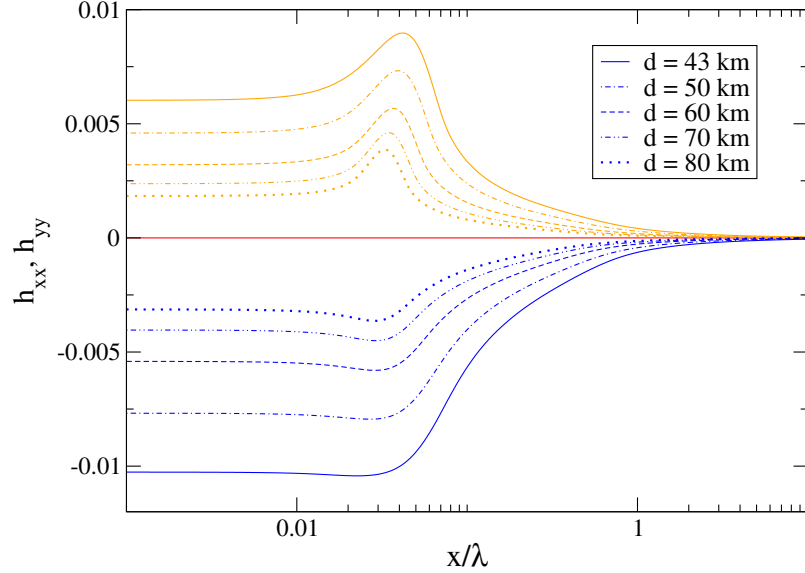


FIG. 8.9 – Dépendance des profils de  $h_{xx}$  et  $h_{yy}$  le long de l'axe  $x$ , normalisé par  $\lambda := \pi/\Omega$ , en fonction de la séparation coordonnée  $d$  entre les étoiles. Les courbes du bas correspondent à  $h_{xx}$  et les courbes du haut à  $h_{yy}$ .

d'évolution.

$M/R$	$M_G [M_\odot]$	$M_{\text{ADM},\infty} [M_\odot]$	$M_B [M_\odot]$	$R [\text{km}]$
0.12	1.35918	2.71836	1.44416	16.7256
0.17	1.69672	3.39344	1.84382	14.7384

TAB. 8.2 – Valeur de la masse gravitationnelle de chaque étoile à l'infini, de la masse ADM à l'infini, de la masse baryonique et du rayon stellaire à l'infini pour les paramètres de compacité  $M/R = 0.12$  et  $M/R = 0.17$ .

### 8.5.3.1 Quantités globales

**Masse ADM :** la masse ADM est définie, pour une métrique asymptotiquement plate, par l'intégrale de surface à l'infini spatial [27]

$$M_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi} \oint_{\infty} [\mathcal{D}^j \gamma_{ij} - \mathcal{D}_i (f^{kl} \gamma_{kl})] dS^i. \quad (8.66)$$

## 8.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

On peut montrer [27] que, en jauge de Dirac, l'expression de la masse ADM se réduit au flux du gradient du facteur conforme

$$M_{\text{ADM}} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\infty} \mathcal{D}_i \Psi \, dS^i. \quad (8.67)$$

On obtient donc, en jauge de Dirac, une expression de la masse ADM identique à celle bien connue pour une métrique conformément plate. En utilisant la formule de Gauss-Ostrogradski, cette expression peut être convertie en l'intégrale de volume de  $\Delta\Psi$ . Sachant que  $\Psi = (\Theta - \nu)/2$ , cette dernière quantité peut être exprimée en soustrayant l'équation (8.34) à l'équation (8.35). On peut alors réécrire l'équation (8.67) sous la forme

$$M_{\text{ADM}} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \Psi^5 \left( 4\pi E + \frac{1}{4} \tilde{A}_{kl} A^{kl} \right) - \Psi \left[ 4h^{kl} \mathcal{D}_k \nu \mathcal{D}_l \Phi + 2h^{kl} \mathcal{D}_k \Phi \mathcal{D}_l \Phi + \frac{\tilde{R}}{4} + h^{kl} \left( \frac{1}{N} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l N - \frac{1}{Q} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l Q \right) \right] d^3x. \quad (8.68)$$

**Masse de Komar :** la masse de Komar est définie, pour une métrique asymptotiquement plate, par l'intégrale de surface à l'infini spatial [106]

$$M_K = \frac{1}{4\pi} \oint_{\infty} \mathcal{D}^k N \, dS_k. \quad (8.69)$$

De la même manière que pour la masse ADM, on se ramène à une intégrale de volume sur les hypersurfaces  $\Sigma_t$  à l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski. Puis, en utilisant l'équation de Poisson (8.34) pour  $\nu$ , on obtient l'expression suivante

$$M_K = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} N \left[ \Psi^4 \left( 4\pi(E + S) + \tilde{A}_{kl} A^{kl} \right) - \frac{h^{kl}}{N} \mathcal{D}_k \mathcal{D}_l N - 2\tilde{D}_k \Phi \tilde{D}^k \nu \right] d^3x. \quad (8.70)$$

**Moment Cinétique :** le moment cinétique total sur une hypersurface  $\Sigma_t$  est défini par l'intégrale de surface à l'infini spatial [32, 159]

$$J = \frac{1}{8\pi} \oint_{\infty} (K^i_j - K f^i_j) \varphi^j \, dS_i, \quad (8.71)$$

où  $\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$  est le vecteur de killing azimutal de la métrique plate  $\mathbf{f}$ , à laquelle  $\gamma$  tend asymptotiquement. En utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski on retrouve à nouveau une intégrale de volume sur l'hypersurface  $\Sigma_t$ . En prenant en compte l'équation de contrainte impulsionnelle (8.5), on peut faire intervenir la densité d'impulsion  $J^i$  et l'intégrale (8.71) devient, en feuilletage maximal ( $K = 0$ )

$$J = \int_{\Sigma_t} \Psi^{10} \tilde{\gamma}_{kl} J^k \varphi^l \, d^3x + \frac{1}{16\pi} \int_{\Sigma_t} \Psi^6 A^{kl} \left( \tilde{D}_k \tilde{\varphi}_l + \tilde{D}_l \tilde{\varphi}_k \right) d^3x, \quad (8.72)$$

où l'on a défini

$$\tilde{\varphi}_i := \tilde{\gamma}_{ik} \varphi^k. \quad (8.73)$$

Le premier terme de l'équation (8.73) est l'expression pour une métrique conformément plate, la seconde intégrale étant nulle dans ce cas car  $\varphi$  est un vecteur de Killing conforme de la métrique plate.

### 8.5.3.2 Séquences d'évolution

On représente sur la figure 8.10 la séquence d'évolution pour des binaires d'étoiles à neutrons de même masse, de compacité  $M/R = 0.12$ . La figure de gauche montre l'énergie de liaison  $E_{\text{liaison}}$  du système binaire définie par

$$E_{\text{liaison}} = M_{\text{ADM},\infty} - M_{\text{ADM}} \quad (8.74)$$

en fonction de la quantité sans dimension  $M\Omega$  où  $M$  est la masse ADM du système pour une séparation infinie  $M_{\text{ADM},\infty}$ . Quand à la figure de droite, elle correspond au moment cinétique total  $J$ , calculé à partir de l'intégrale de volume (8.73), en fonction de  $M\Omega$ . Sur ces deux figures, on représente en traits pointillés les résultats post-Newtoniens obtenus par Blanchet à l'ordre 3PN [21]. Les valeurs numériques obtenues dans notre formulation sans ondes (WAT pour "Waveless Approximation Theory") sont repérées par des cercles et celles de l'approximation IWM par des carrés.

On remarque que l'écart entre nos résultats et ceux de l'approximation IWM est plus grand, que ce soit pour l'énergie de liaison ou pour le moment cinétique, que l'écart entre le 3PN et l'approximation IWM. Cela peut paraître surprenant a priori car on peut penser que la différence principale entre les résultats numériques et post-Newtoniens provient du fait que l'approche post-Newtonienne suppose que les étoiles sont des particules ponctuelles alors qu'un traitement hydrodynamique est effectué numériquement. De plus, il semble raisonnable de penser que le fluide est décrit au moins en première approximation par une métrique conformément plate. Et donc, le fait de considérer une métrique prenant en compte les termes non conformément plats ne devrait entraîner qu'une petite déviation aux résultats IWM. Cependant, il est possible que, dans l'approximation IWM, deux effets se compensent, le traitement hydrodynamique des étoiles et la troncation des équations d'Einstein due à l'hypothèse de métrique conformément plate. Si tel était le cas, il n'y aurait rien d'étonnant à ce que les résultats dans notre approximation sans ondes dévient autant des résultats IWM. Cette hypothèse, ainsi que diverses autres explications possibles, devraient être étudiées prochainement.

Pour vérifier la pertinence de nos résultats, on représente sur la figure 8.11 la valeur du Viriel (8.65) pour les différents points de la séquence, en fonction de  $M\Omega$ . On remarque qu'il est de l'ordre de  $10^{-5}$  tout au long de la séquence, la configuration la plus proche est un peu moins précise,  $\sim 4.10^{-5}$ , mais cela reste encore tout à fait satisfaisant. Précisons que nous calculons le viriel à l'aide des intégrales de volume (8.68) et (8.70) pour la masse ADM et de Komar. Afin de vérifier que la valeur du Viriel est indépendant des formules choisies pour calculer les masses, on représente également sur la figure 8.11 la différence relative entre les masses ADM calculées par l'intégrale de surface (8.67) ou par l'intégrale de volume (8.68), ainsi que la différence relative entre les masses de Komar calculées par l'intégrale de surface (8.69) ou par l'intégrale de volume (8.70). On obtient typiquement des différences relatives entre ces grandeurs de l'ordre de  $10^{-6}$  ce qui montre que le viriel reste du même ordre de grandeur quel que soit les formules que l'on choisi pour le calculer. Il s'agit également d'un bon test sur la précision de la résolution des équations de Poisson (8.34) et (8.35) pour  $\nu$  et  $\Theta$ , sachant que l'on utilise ces dernières équations pour se ramener à une intégrale de volume pour les masses ADM et de Komar.

## 8.5. RÉSULTATS NUMÉRIQUES

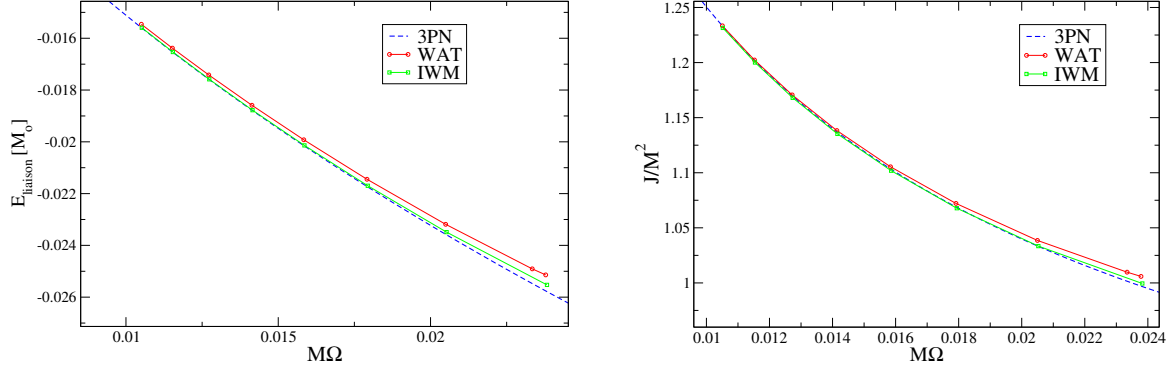


FIG. 8.10 – Énergie de liaison (à gauche) et moment cinétique total  $J/M^2$  (à droite) en fonction de la quantité sans dimension  $M\Omega$  où  $M$  est la masse ADM pour des étoiles infiniment séparées. Séquence d'évolution pour la compacité  $M/R = 0.12$ . Les courbes en pointillés sont les résultats à l'ordre 3PN de Blanchet [21].

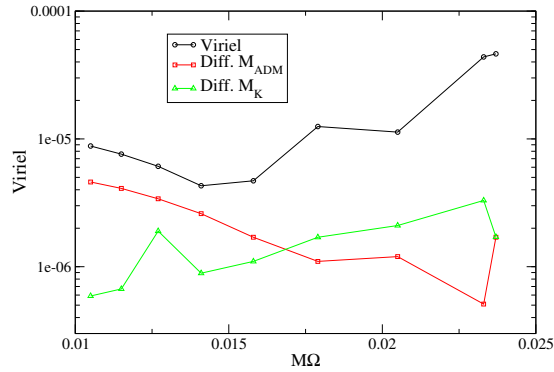


FIG. 8.11 – Valeur du Viriel, de la différence relative entre les deux masses ADM (8.67) et (8.68) (Diff.  $M_{\text{ADM}}$ ) et de la différence relative entre les deux masses de Komar (8.69) et (8.70) (Diff.  $M_K$ ), en fonction de la quantité sans dimension  $M\Omega$ .

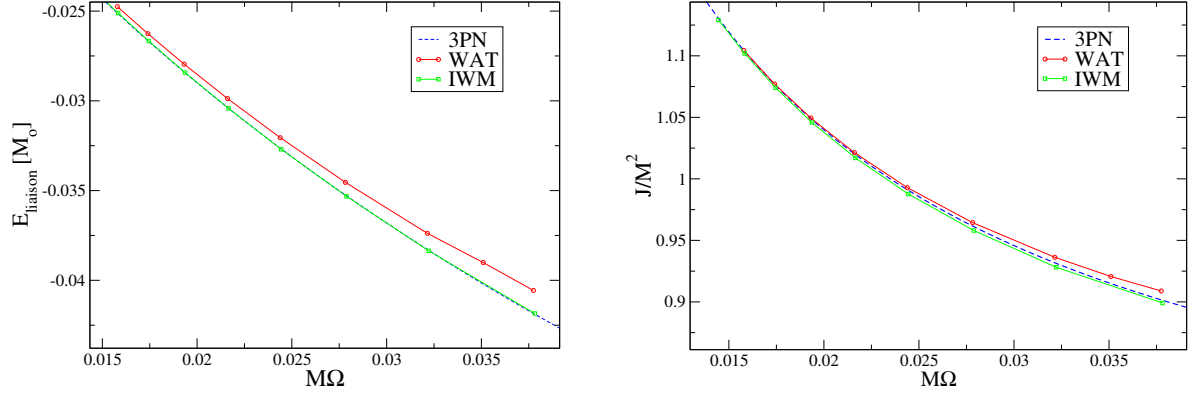


FIG. 8.12 – Énergie de liaison (à gauche) et moment cinétique total  $J/M^2$  (à droite) en fonction de la quantité sans dimension  $M\Omega$  où  $M$  est la masse ADM pour des étoiles infiniment séparées. Séquence d'évolution pour la compacité  $M/R = 0.17$ . Les courbes en pointillés sont les résultats à l'ordre 3PN de Blanchet [21].

La séquence d'évolution pour les étoiles à neutrons plus compactes,  $M/R = 0.17$ , est présentée sur la figure 8.12. On y retrouve l'énergie de liaison du système binaire et le moment cinétique total en fonction de  $M\Omega$ . On peut émettre les mêmes conclusions que pour la séquence de plus faible compacité, les effets étant encore plus amplifiés, à savoir que la différence entre nos calculs et les résultats IWM est important devant l'écart entre les résultats IWM et post-Newtoniens.

## 8.6 Conclusion

Nous avons calculés des séquences de binaires d'étoiles à neutrons irrotationnelles à l'aide d'une formulation dans laquelle le système complet des équations d'Einstein est résolu, en feuilletage maximal et jauge de Dirac généralisée. Dans cette formulation, la solution en zone proche ( $r \leq r_0, r'_0$ ) admet une symétrie de Killing et en zone externe, elle est asymptotiquement sans ondes, permettant de retrouver une métrique asymptotiquement plate et une masse ADM bien définie. Les solutions ainsi calculées prenant en compte les termes non conformément plat de la métrique devraient être des solutions de quasi-équilibre plus précises que celles obtenues dans l'approximation IWM.

Nous avons montré que la distance à laquelle on tronque la dérivée temporelle de la trace de la courbure extrinsèque joue un rôle fondamental et qu'il est nécessaire de prendre un rayon de troncature suffisamment grand. Nous avons obtenu des isocontours pour les différentes composantes de  $h_{ij}$  en accord avec ceux obtenus numériquement par K. Uryu [140] mais également avec les résultats post-Newtoniens de Asada *et al.* [7]. L'amplitude des potentiels  $h_{ij}$  étant pourtant relativement faible, l'énergie de liaison du système binaire ainsi que le moment cinétique total se voient assez largement déviés des résultats IWM comparativement à l'écart entre les

résultats à l'ordre 3PN et de l'approximation IWM. Bien que cela puisse paraître surprenant, il est possible de trouver une raison à cela. Il se peut par exemple que les résultats relativement proches entre l'approximation IWM et le post-Newtonien soient dus à une compensation entre les effets hydrodynamiques et l'hypothèse de métrique conformément plate.

Les séquences que nous avons considérées dans ce chapitre terminent toutes par la limite de perte de masse. Il sera par la suite intéressant de considérer des équations d'états pour lesquelles une instabilité dynamique apparaît, par exemple une équation d'état polytropique d'indice polytropique  $\gamma = 3$ . Cela permettra de quantifier l'erreur commise par l'approximation d'une métrique conformément plate sur la fréquence de la dernière orbite stable.

## **8.7 Article soumis à Phys. Rev. Lett. (preprint, gr-qc/0511136)**



# Binary neutron stars in a waveless approximation

**Kōji Uryū, François Limousin, John L. Friedman, Eric Gourgoulhon and Masaru Shibata**

Submitted in Phys. Rev. Lett., gr-qc/0511136

## ABSTRACT

Equilibria of binary neutron stars in close circular orbits are computed numerically in a waveless approximation to general relativity. The full Einstein equation is solved on an initial hypersurface to obtain an asymptotically flat form of the 4-metric and an extrinsic curvature whose time derivative vanishes in a comoving frame. Two independent numerical codes, one based on a finite difference method, the other on a spectral method, are developed, and solution sequences that model inspiraling binary neutron stars during the final several orbits are successfully computed. The binding energy of the system near its final orbit deviates from earlier results of third post-Newtonian and of spatially conformally flat calculations. The new solutions may serve as initial data for merger simulations and as members of quasiequilibrium sequences to generate gravitational wave templates, and may improve estimates of the gravitational-wave cutoff frequency set by the last inspiral orbit.

**Introduction :** Equilibria of close binary neutron stars in circular orbits, constructed numerically, have been studied as a model of the final several orbits of binary inspiral prior to merger (see [17] for a review). These numerical solutions have been used as initial data sets for merger simulations [127]; in quasi-equilibrium sequences, to estimate gravitational waveforms [55, 128]; and to determine the cutoff frequency of the inspiral waves [18, 57, 110].

To maintain equilibrium circular orbits in general relativity one must introduce an approximation that eliminates the back reaction of gravitational radiation. An ansatz of this kind is the waveless approximation proposed by Isenberg [87]. His approach adopts a constrained Hamiltonian formulation of Einstein's equation in which time derivatives of dynamical variables are discarded. As a result field equations for the metric components become elliptic equations. The gravitational field is no longer dynamical, and the dynamics of a system are determined by the equation of motion of the matter source. One of his proposals was to choose a conformally flat spatial geometry maximally embedded in a spacetime. Wilson and Mathews later rediscovered this type of waveless approximation and applied to numerical computations of binary inspirals [150]. The Isenberg-Wilson-Mathews (IWM) formulation has been widely used for modeling binary neutron star inspiral in the past decade [15, 30, 133, 141, 150] as well as to compute binary black hole solutions [41, 71, 76]. For applications of the IWM formulation to simulations, see [56, 110].

The error introduced in a solution by restriction to conformally flat three geometry was examined in Refs. [6, 43, 61, 91]. In models of binary neutron stars, it is estimated to cause a several percent error in the orbital angular velocity [128], implying a comparable deviation from circular orbits [101, 104, 105, 108].

New waveless formulations, incorporating a generic form of the metric, are suitable for accurate computation of binary compact objects [120, 129]. In this letter, we present first results of numerical computations for binary neutron stars modeled in one of these formulations [129].

**Formulation of the waveless spacetime :** The new formulation [129] exactly solves the Einstein-Euler system written in 3+1 form on a spacelike hypersurface. The spacetime  $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma$  is foliated by the family of spacelike hypersurfaces,  $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ . The future-pointing normal  $n^\alpha$  to  $\Sigma_t$  is related to the timelike vector  $t^\alpha$  (the tangent  $\partial_t$  to curves  $t \rightarrow (t, x)$ ,  $x \in \Sigma$ ) by  $t^\alpha = \alpha n^\alpha + \beta^\alpha$ , where  $\alpha$  is the lapse, and where the shift  $\beta^\alpha$  satisfies  $\beta^\alpha n_\alpha = 0$ . A spatial metric  $\gamma_{ab}(t)$  defined on  $\Sigma_t$  is equal to the projection tensor  $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta$  restricted to  $\Sigma_t$ . In terms of a conformal factor  $\psi$  and a conformally rescaled spatial metric  $\tilde{\gamma}_{ab} = \psi^{-4} \gamma_{ab}$ , the metric  $g_{\alpha\beta}$  takes the form,  $ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + \psi^4 \tilde{\gamma}_{ij} (dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$ , in a chart  $\{t, x^i\}$ . A condition to specify the conformal decomposition is  $\det \tilde{\gamma}_{ab} = \det f_{ab}$ , where  $f_{ab}$  is a flat metric.

In our formulation we impose, as coordinate conditions, maximal slicing ( $K = 0$ ) and the spatially transverse condition  $\overset{\circ}{D}_b \tilde{\gamma}^{ab} = 0$  (the Dirac gauge [27, 129]), where  $\overset{\circ}{D}_b$  is the covariant derivative with respect to the flat metric. We then restrict time-derivative terms in this gauge to guarantee that all components of the field equation are elliptic equations, and hence that all metric components, including the spatial metric, have Coulomb-type fall off [129]. While it is found to be sufficient to impose a condition,  $\partial_t \tilde{\gamma}^{ab} = O(r^{-3})$ , to have Coulomb-type fall off in the asymptotics, we impose a stronger condition  $\partial_t \tilde{\gamma}^{ab} = 0$ . For the other quantities,

we impose helical symmetry : spacetime and fluid variables are dragged along by the helical vector  $k^\alpha = t^\alpha + \Omega\phi^\alpha$ . For example, the time derivative of extrinsic curvature  $K_{ab}$  is expressed as  $\partial_t K_{ab} = -\mathcal{L}_{\Omega\phi} K_{ab}$ . The resulting field equations are solved on a slice  $\Sigma_0$ . The Hamiltonian constraint, momentum constraint, spatial trace and spatial tracefree part of the Einstein equation are, respectively, regarded as elliptic equations for  $\psi$ ,  $\beta^a$ ,  $\alpha$  and  $h_{ab} := \tilde{\gamma}_{ab} - f_{ab}$ , while  $A_{ab}$ , the trace free part of the extrinsic curvature, is computed from the metric components.

To compute the motion of binary neutron stars in circular orbits, the flow field is assumed to be stationary in the rotating frame. Since any solution to the waveless formulation satisfies all constraint equations, it is, in particular, an initial data set for the Einstein-(relativistic)Euler system. When one evolves such a binary neutron star solution by integrating the Einstein-Euler system, the orbits will deviate from exact circularity because of the radiation reaction force. Instead, one can construct an artificial spacetime with circular orbits by dragging the waveless solution on  $\Sigma_0$  along the helical vector,  $k^\alpha = t^\alpha + \Omega\phi^\alpha$ , so that the spacetime has helical symmetry. Although the spacetime so constructed will not exactly satisfy Einstein's equation, a family of such spacetimes, associated with circular orbits of decreasing separation, will model the inspiral of a binary neutron star system during its final several orbits. We expect this sequence of approximate solutions to be more accurate than earlier quasiequilibrium sequences obtained in the IWM framework. Explicit forms of all equations for the fields and the matter are found in [27, 129].

**Numerical methods :** We have developed two independent numerical schemes to compute binary neutron star solutions. One is based on a finite difference method [139, 141], the other on a spectral method implemented via the C++ library LORENE [98]. Each method has been successfully used to compute binary neutron star configurations using the IWM formulation [30, 72, 133, 134, 139, 141]. For the new waveless formulation, detailed convergence tests and calibration of each method will be published separately. In this letter, we show quantitative agreement of the two methods for  $h_{ab}$ , which is the significant and reliable calibration for the new numerical solutions.

In both methods, equations are written in Cartesian coordinate components, and they are solved numerically on spherical coordinate grids,  $r$ ,  $\theta$ , and  $\phi$ . In the finite difference method, an equally spaced grid is used from the center of orbital motion to  $5R_0$  where there are  $n_r = 16, 24$ , and  $32$  grid points per  $R_0$  ; from  $5R_0$  to  $10^4 R_0$  a logarithmically spaced grid has  $60, 90$ , and  $120$  points (depending on the resolution). Here  $R_0$  is the geometric radius of a neutron star along a line passing through the center of orbit to the center of a star. Accordingly, for  $\theta$  and  $\phi$  there are  $32, 48$ , and  $64$  grid points each from  $0$  to  $\pi/2$  [139, 141]. For the spectral method, five domains (a nucleus, three shells and a compactified domain extending up to infinity) around each star are used. In each domain, the number of collocation points is chosen to be  $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 33 \times 21 \times 20$  [30, 72].

**Numerical solutions for binary neutron stars :** A model of the evolutionary path of binary inspiral is given by a sequence of equilibria along which the neutron star matter is assumed to be isentropic ; and the implied fluid flow is assumed to conserve the baryon number, entropy and vorticity of each fluid element [20, 92]. In the case where the spins of component stars

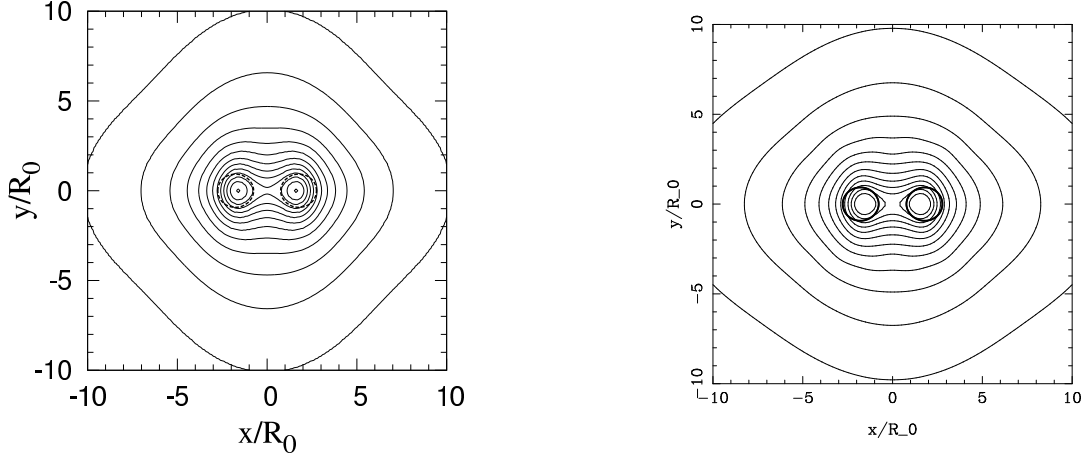


FIG. 8.13 – Contours of  $(h_{xx} - h_{yy})/2$  in the  $xy$ -plane, computed by the finite difference code (left) and by the spectral code (right). The binary separation  $2d$  is given by  $d/R_0 = 1.75$ . Contours extend from  $-0.014$  to  $-0.002$  with step  $0.001$ .

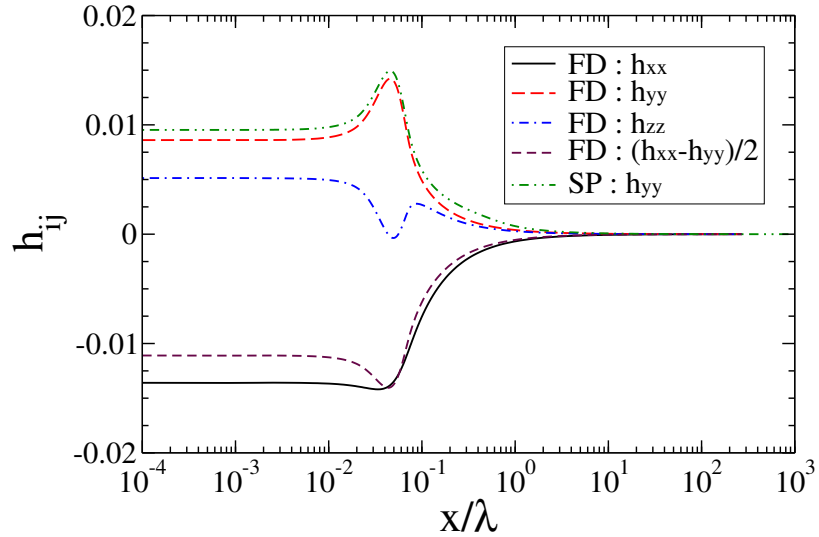


FIG. 8.14 – Components  $h_{ij}$  along the  $x$ -axis, normalized by  $\lambda = \pi/\Omega$ . A neutron star extends from  $x/\lambda = 0.02024$  to  $0.04722$ . Curves labeled FD and SP display results of the finite difference and spectral codes, respectively

are negligible, the flow becomes irrotational; one can introduce the velocity potential  $\Phi$  by  $hu_\alpha = \nabla_\alpha \Phi$ , where  $h$  is the specific enthalpy and  $u^\alpha$  is the fluid 4-velocity. For isentropic flow, one can assume a one-parameter equation of state,  $p = p(\rho)$ , with  $\rho$  the baryon mass density. The matter is then described by two independent variables, a thermodynamic variable such as  $p/\rho$ , and the velocity potential  $\Phi$ . In this letter, we assume a polytropic equation of state  $p = \kappa \rho^\Gamma$  with adiabatic index  $\Gamma = 2$ , and we display results for equal-mass binaries.

In Fig. 8.13, contours of the non-conformal part of the metric computed by two numerical codes are shown for selected solutions. In these solutions, the rest mass of each star is taken to be that of a single spherical star of compactness  $(M/R)_\infty = 0.17$ , and the half separation in coordinate distance from the orbital center to the geometric center of a neutron star is set to  $d/R_0 = 1.75$ . From these contours, one can verify qualitative agreement of the results from the two independent numerical methods. In Fig. 8.14, components  $h_{ij}$  along the  $x$ -axis are plotted for the same solution, where the  $x$ -axis passes through the centers of the neutron stars.

In [129], it is shown that the ADM mass,  $M_{\text{ADM}}$ , and the asymptotic Komar mass,  $M_K$  defined by

$$M_{\text{ADM}} := \frac{1}{16\pi} \oint_\infty (\partial_b \gamma^{ab} - \partial^a \gamma^b_b) dS_a, \quad (8.75)$$

$$M_K := -\frac{1}{8\pi} \oint_\infty \nabla^\alpha t^\beta dS_{\alpha\beta} \quad (8.76)$$

are equal,  $M_{\text{ADM}} = M_K$ , under asymptotic conditions satisfied by solutions in the present formulation. The equality is related to a virial relation for the equilibrium,

$$\int x^a \gamma_a^\alpha \nabla_\beta T_\alpha^\beta \sqrt{-g} d^3x = 0, \quad (8.77)$$

which is used to examine accuracy of numerical solutions. Fig. 8.15 shows the computed value of the virial integral in Eq. (8.77), normalized by  $M_{\text{ADM}}$ , for a solution sequence with  $(M/R)_\infty = 0.17$ . The figure portrays the increase in accuracy of the finite difference method as the resolution increases from  $n_r = 16$  to 32. We also evaluated the surface integrals Eqs. (8.75) and (8.76) on a sphere of large radius, centered at the binary system's center of mass. We confirmed that each mass converges asymptotically and that, for each model, the difference of the two masses is as small as  $|M_{\text{ADM}} - M_K|/M_{\text{ADM}} \sim 0.01\%$  for the finite difference method and  $\sim 0.001\%$  for the spectral method; these errors are consistent with the numerical errors of the virial relation shown in Fig. 8.15.

Finally, the binding energy  $E_b = M_{\text{ADM}} - M_\infty$  of solution sequences for two models are plotted in Fig. 8.16. The top panel shows a less compact model with  $(M/R)_\infty = 0.12$ , the bottom panel a model whose compactness,  $(M/R)_\infty = 0.17$ , is closer to that of neutron stars. The thin solid curve in each figure describes a third post-Newtonian (3PN) calculation [21], and the dot-dot-dash curve describes solutions in the IWM formulation. For each compactness, our solution sequence fits the 3PN curve well at larger separation. Each sequence reaches a configuration with a cusp without any turning point in the binding energy curve, in agreement with results of the IWM formulation [133, 134, 139, 141] (the spectral code does not yet converge for the closest orbits – largest  $\Omega M_\infty$  – of Figs. 8.15 and 8.16, because it is more sensitive to tidal

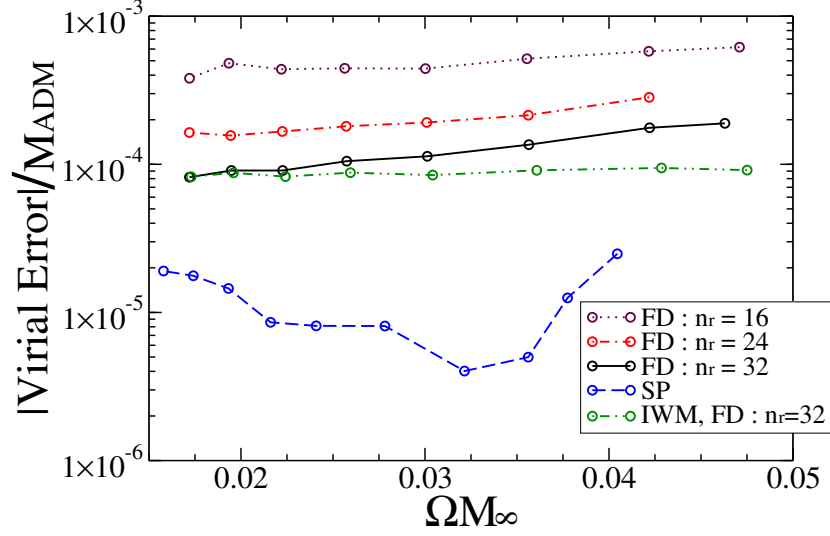


FIG. 8.15 – Virial error vs. angular velocity  $\Omega$ , normalized by  $M_{\infty}$ , twice the gravitational mass of an isolated neutron star. Each curve labeled FD shows results of a finite difference code with a given resolution. Curves labeled SP and IWM show results of the spectral code and the spatially conformally flat approximation, respectively.

deformation : higher multipoles in the density of each star lead to a divergent iteration). For the case with  $(M/R)_{\infty} = 0.12$ , the waveless solutions agree well with the IWM solution ; as expected, the contribution of  $h_{ab}$  is small for the smaller compactness. For the case with  $(M/R)_{\infty} = 0.17$ , however, the binding energy  $E_b$  of the waveless sequences clearly deviates from that of the 3PN and IWM sequences at the larger values of  $\Omega M_{\infty}$ . This suggests that the 3PN and IWM formulations each overestimate the binding energy – in the 3PN case, by neglecting the tidal deformation, in the IWM formulation by neglecting the contribution from  $h_{ab}$ .

**Discussion :** According to the second post Newtonian theory (e.g. [6]), the correction to binding energy  $\Delta E_b$  due to the contribution of  $h_{ij}$  is of order  $M_{\infty} h_{ij} v^i v^j$ , where the magnitude of orbital velocity,  $v^i$ , may be typically  $v \approx 0.34(\Omega M_{\infty}/0.04)^{1/3}$ . Since  $h_{ij}$  is of  $O(v^4)$ ,  $\Delta E_b/M_{\infty} = O(v^6) \sim 10^{-3}$  for  $\Omega M_{\infty} \sim 0.04$ . This agrees with the difference between the binding energies calculated by the IWM and waveless formulation in Fig. 8.16.

An important quantity for the data analysis of gravitational waves is  $dE_b/d\Omega$ , because it determines the evolution of gravitational wave phase  $\Phi_{\text{GW}} = 2 \int \Omega(t) dt$ . Assuming adiabatic evolution, the time dependence of angular velocity  $\Omega(t)$  is calculated from  $d\Omega/dt = |(dE/dt)_{\text{GW}}|/(dE_b/d\Omega)$ , where  $(dE/dt)_{\text{GW}}$  is the luminosity of gravitational waves. Our present result shows that the derivative  $dE_b/d\Omega$  of waveless sequences is  $\sim 10$ – $15\%$  larger than those of IWM and 3PN curves for  $\Omega M_{\infty} \geq 0.035$ . Since  $\sim 2$  orbits are maintained from  $\Omega M_{\infty} = 0.035$  to merger for the case with  $(M/R)_{\infty} = 0.17$  [128], the error in  $\Phi_{\text{GW}}$  calculated from the equilibrium sequence of IWM and 3PN formulations would be accumulated to  $\sim 50\%$  during the last

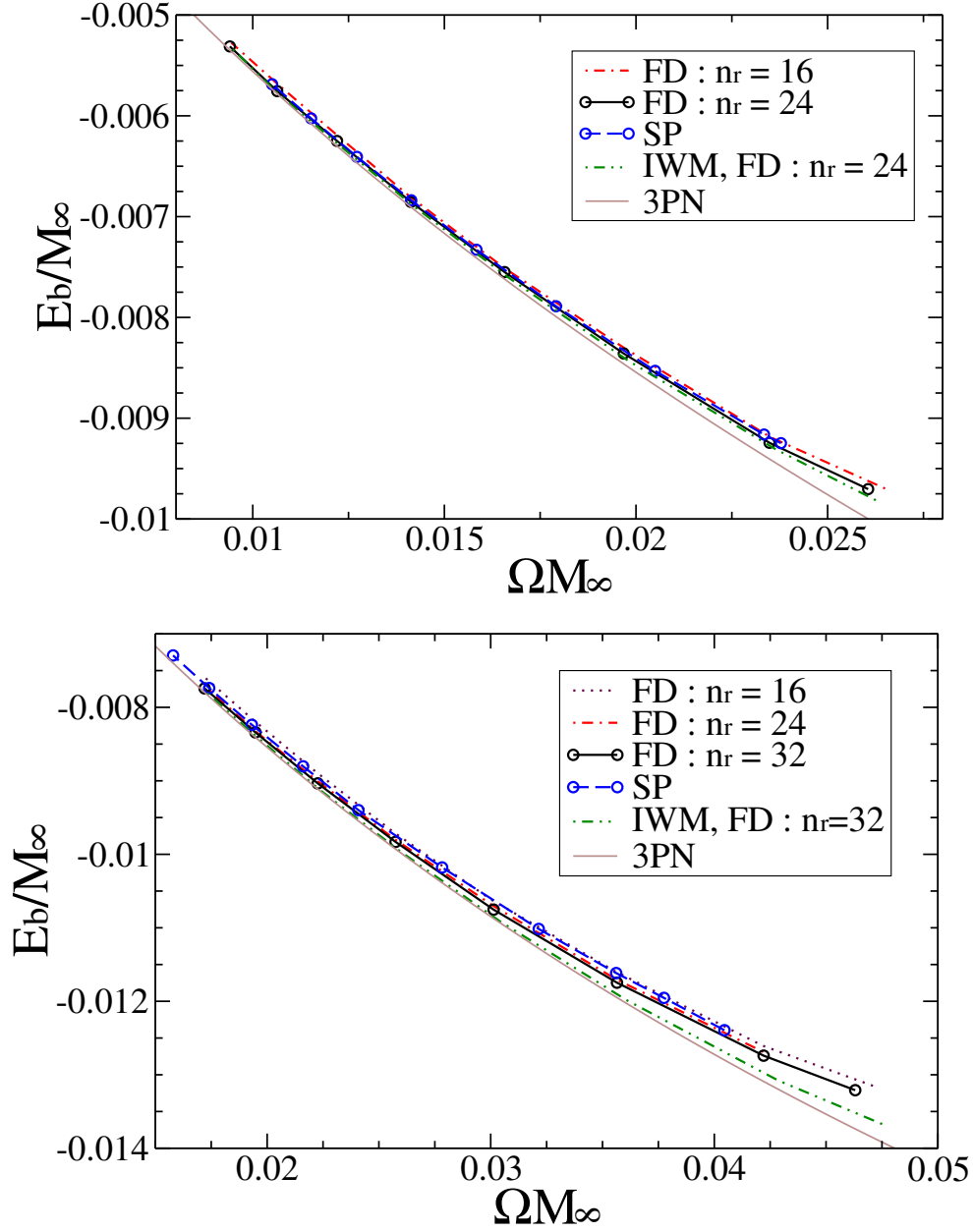


FIG. 8.16 – Plot of the binding energy  $E_b := M_{\text{ADM}} - M_\infty$  with respect to the normalized angular velocity for  $(M/R)_\infty = 0.12$  (top) and  $0.17$  (bottom). Curves are labeled as in Fig. 8.15. The thin solid curve shows results from the 3PN calculation [21].

$\sim 2$  orbits. The error may not be negligible for accurately determining the frequency of gravitational waves at the final orbits before merger, which can be used for constraining equations of state for nuclear matter [18, 110].

Such a phase error may be much larger for the final orbits of binary black hole and black hole–neutron star inspirals. In these cases,  $\Omega M_\infty$  in the last orbit may reach  $\sim 0.1$  or larger (e.g. [21, 41, 71, 76]). Since  $\Delta E_b$  is of order  $O(v^6)$ , the phase error is likely to be of order unity around  $\Omega M_\infty \geq 0.1$ . Therefore, a template constructed from the IWM formulation may cause a systematic error in the data analysis. Our waveless approximation may improve binary black hole and black hole–neutron star solutions for this purpose.





# Chapitre 9

## Trous noirs et conditions de bord

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Motivations . . . . .</b>	<b>163</b>
<b>9.2</b>	<b>Décomposition sandwich conforme . . . . .</b>	<b>164</b>
<b>9.3</b>	<b>Conditions de bord d’horizons isolés . . . . .</b>	<b>165</b>
9.3.1	Quelques définitions préliminaires . . . . .	165
9.3.2	Conditions de bord sur un horizon non-expansif . . . . .	166
9.3.3	Conditions de bord sur un horizon faiblement isolé . . . . .	168
<b>9.4</b>	<b>Trou noir simple . . . . .</b>	<b>169</b>
9.4.1	Méthode . . . . .	169
9.4.2	Dégénérescence de l’ensemble des conditions de bord . . . . .	170
9.4.3	Test de la condition de bord mixte pour $\tilde{b}$ . . . . .	171
9.4.4	Autres combinaisons de conditions de bord . . . . .	172
9.4.5	Discussion . . . . .	175
<b>9.5</b>	<b>Trous noirs binaires . . . . .</b>	<b>175</b>
9.5.1	Méthode . . . . .	175
9.5.2	Conditions limites . . . . .	177
9.5.3	Tests . . . . .	178
9.5.4	Séquences d’évolution . . . . .	180
<b>9.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>182</b>

---

### 9.1 Motivations

L’étude d’espace-temps contenant des trous noirs en quasi-équilibre présente un intérêt important en astrophysique et en relativité numérique. En effet, la simulation de systèmes composés de trous noirs commence nécessairement par la spécification de données initiales. Afin que ces simulations donnent des résultats astrophysiques appropriés, notamment pour la coalescence de trous noirs, il est nécessaire de construire des données initiales astrophysiquement

réalistes [40, 41, 71, 76]. Parvenir à cela est le but des efforts menés pour améliorer les données initiales de trous noirs, et en particulier des trous noirs binaires. Il est devenu clair que tous les paramètres libres des données initiales, incluant les conditions de bord, doivent être choisis prudemment afin de respecter le contenu physique du système que l'on désire simuler.

Le formalisme des horizons isolés développé par Ashtekar *et al.* (voir Ref. [12] pour une revue) fournit un cadre particulièrement bien adapté pour l'étude de trous noirs en quasi-équilibre dans un espace-temps dynamique. De plus, il présente deux caractéristiques particulièrement intéressantes d'un point de vue numérique : d'un côté, les objets géométriques ont comme support des surfaces compactes (caractère quasi-local) et, d'un autre côté, il présente une structure hiérarchique permettant de rendre compte des hypothèses physiques et géométriques à implémenter.

A l'issue d'une analyse 3+1 des horizons isolés, un ensemble de conditions de bord pour les champs entrant dans la description 3+1 de l'espace-temps a été proposé dans les Refs. [49, 54, 74, 89]. Un des buts de ce chapitre, spécialement dans le cas d'un unique trou noir, est de tester numériquement cet ensemble de conditions de bord. La structure géométrique des conditions de bord permet de les adapter à différents schémas de résolution des équations d'Einstein. Mais, un schéma particulier doit être choisi afin de les remanier en conditions analytiques concrètes sur les champs satisfaisant les équations différentielles. Plus concrètement, on se concentre ici sur la construction de données initiales dans l'approche sandwich conforme. En utilisant une technique d'excision, c'est-à-dire qu'une sphère  $\mathcal{S}$  est enlevée de l'hypersurface spatiale initiale  $\Sigma$ , et en imposant que  $\mathcal{S}$  soit une tranche de l'horizon isolé, un ensemble de conditions de bord interne pour un ensemble spécifique d'équations elliptiques est donné.

On rappelle dans la section 9.2 les équations elliptiques à considérer pour un problème de données initiales, en nous plaçant dans le formalisme sandwich conforme. La section 9.3 est dévolue aux conditions de bord caractérisées par un horizon non-expansif puis un horizon faiblement isolé. Dans la section 9.4, on s'intéresse à tester les différentes conditions de bord dans le cas d'un seul trou noir, puis on présente la construction de données initiales de trous noirs binaires satisfaisant différents ensembles de conditions de bord dans la section 9.5.

## 9.2 Décomposition sandwich conforme

On rappelle dans cette section les équations, dans le cas du vide, qui découlent du formalisme sandwich conforme introduit au chapitre 1.

On utilise les mêmes conventions qu'au chapitre 8 sur les étoiles à neutrons binaires pour la décomposition de la courbure extrinsèque, à savoir

$$A^{ij} := \Psi^4 \left( K^{ij} - \frac{1}{3} K \gamma^{ij} \right) = \frac{1}{2N} \left[ \left( \tilde{L}\beta \right)^{ij} + \dot{\tilde{\gamma}}^{ij} \right] \quad (9.1)$$

$$\tilde{A}_{ij} := \tilde{\gamma}_{ik} \tilde{\gamma}_{jl} A^{kl} = \Psi^{-4} \left( K_{ij} - \frac{1}{3} K \gamma_{ij} \right). \quad (9.2)$$

L'équation de contrainte hamiltonienne devient une équation pour le facteur conforme  $\Psi$ ,

### 9.3. CONDITIONS DE BORD D'HORIZONS ISOLÉS

appelée également équation de Lichnerowicz-York :

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k \Psi = \frac{\Psi}{8} \tilde{R} - \Psi^5 \left( \frac{1}{8} \tilde{A}_{kl} A^{kl} - \frac{K^2}{12} \right) \quad (9.3)$$

L'équation de contrainte impulsionnelle est une équation pour le vecteur shift  $\beta$  que l'on écrit sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k \tilde{D}^k \beta^i + \frac{1}{3} \tilde{D}^i \tilde{D}_k \beta^k + \tilde{R}^i_k \beta^k &= 2N \left( 8\pi \Psi^4 J^i + \frac{2}{3} \tilde{D}^i K \right) - \tilde{D}_k \dot{\gamma}^{ik} \\ &+ 2N A^{ik} \tilde{D}_k \ln (N \Psi^{-6}). \end{aligned} \quad (9.4)$$

En fixant la valeur de la dérivée temporelle de la trace de la courbure extrinsèque  $\dot{K}$ , il suit une équation pour la fonction lapse, qui s'ajoute aux équations de contraintes (9.3) et (9.4)

$$\tilde{D}_k \tilde{D}^k N + 2 \tilde{D}_k \ln \Psi \tilde{D}^k N = \Psi^4 \left[ N \left( 4\pi (E + S) + \tilde{A}_{kl} A^{kl} + \frac{K^2}{3} \right) + \beta^k \tilde{D}_k K - \dot{K} \right]. \quad (9.5)$$

Dans cette approche, le problème (étendu) des données initiales consiste à prescrire les champs libres  $(\tilde{\gamma}_{ij}, \dot{\tilde{\gamma}}_{ij}, K, \dot{K})$  sur une hypersurface spatiale  $\Sigma$ , les *données libres*, puis à résoudre l'ensemble des équations elliptiques (9.3) - (9.5) pour le facteur conforme  $\Psi$ , le vecteur shift  $\beta$  et la fonction lapse  $N$ , les *fonctions contraintes*.

Utilisant une technique d'excision, nous enlevons à l'hypersurface initiale une sphère  $\mathcal{S}$ , représentant l'horizon du trou noir, et son intérieur. La caractérisation géométrique des horizons isolés doit donc être traduite en conditions de bord interne pour les paramètres  $\Psi$ ,  $\beta^i$  et  $N$ .

## 9.3 Conditions de bord d'horizons isolés

### 9.3.1 Quelques définitions préliminaires

#### *Système de coordonnées stationnaire par rapport à $\mathcal{H}$*

Il est utile d'effectuer une décomposition orthogonale 2+1 du vecteur shift par rapport aux surfaces  $\mathcal{S}_t$ , selon

$$\beta^i = b s^i - V^i \quad \text{avec} \quad g_{\mu\nu} s^\mu V^\nu = 0. \quad (9.6)$$

On dit qu'un système de coordonnées  $(x^\alpha) = (t, x^i)$  est stationnaire par rapport à l'hypersurface nulle  $\mathcal{H}$  si et seulement si l'équation de  $\mathcal{H}$  dans ce système de coordonnées n'implique que les coordonnées spatiales  $(x^i)$  et ne dépend pas de  $t$ . On en déduit que le vecteur temps coordonnée  $t$  est tangent à  $\mathcal{H}$  [74]. Par conséquent, pour un système de coordonnées stationnaire par rapport à  $\mathcal{H}$  :  $g_{\mu\nu} \ell^\mu t^\nu = 0$ . En remplaçant  $\ell$  et  $t$  par leurs décompositions 3+1,  $\ell = N(\mathbf{n} + \mathbf{s})$  [Eq. (4.34)] et  $t = N\mathbf{n} + \beta$  [Eq. (1.8)], on obtient

$$b = N. \quad (9.7)$$

On en déduit également, en utilisant à nouveau les décompositions 3+1 de  $\ell$  et  $t$ , que pour un système de coordonnées stationnaire par rapport à  $\mathcal{H}$  :

$$\ell = t + V. \quad (9.8)$$

On appellera donc  $V$  la vitesse de surface de  $\mathcal{H}$  par rapport au système de coordonnées  $(x^\alpha)$  stationnaire par rapport à  $\mathcal{H}$ .

### *Courbure extrinsèque des surfaces $\mathcal{S}_t$*

La courbure extrinsèque ou seconde forme fondamentale de  $\mathcal{S}_t$ , vue comme une hypersurface de  $(\Sigma_t, \gamma)$ , est la forme bilinéaire définie par

$$H_{\mu\nu} = q^\beta_\mu q^\alpha_\nu D_\alpha s_\beta. \quad (9.9)$$

On peut noter la similarité avec l'équation (4.42) définissant la seconde forme fondamentale  $\Theta$  de  $\mathcal{H}$  ainsi qu'avec la courbure extrinsèque  $K$  de  $\Sigma_t$ , qui peut s'écrire, en dehors des définitions déjà proposées au chapitre 1,  $K_{\mu\nu} = -\gamma^\beta_\mu \gamma^\alpha_\nu \nabla_\alpha n_\beta$ .

### *Expressions 2+1 conformes*

Tout d'abord, on définit le vecteur normal à  $\mathcal{S}_t$  et de norme unité par rapport à la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{s}^\mu := \Psi^2 s^\mu \quad \text{et} \quad \tilde{s}_\mu := \tilde{\gamma}_{\mu\alpha} s^\alpha = \Psi^{-2} s_\mu. \quad (9.10)$$

Si on voit  $\mathcal{S}_t$  comme une hypersurface de  $\Sigma_t$  munie de la métrique conforme  $\tilde{\gamma}$ , la première forme fondamentale de  $\mathcal{S}_t$  s'écrit

$$\tilde{q}_{\mu\nu} = \Psi^{-4} q_{\mu\nu} = \tilde{\gamma}_{\mu\nu} - \tilde{s}_\mu \tilde{s}_\nu \quad (9.11)$$

et la seconde forme fondamentale est définie par une formule similaire à l'équation (9.9), en remplaçant  $D$  par  $\tilde{D}$  et  $s$  par  $\tilde{s}$

$$\tilde{H}_{\mu\nu} = q^\beta_\mu q^\alpha_\nu \tilde{D}_\alpha \tilde{s}_\beta. \quad (9.12)$$

On réécrit la décomposition du shift (9.6) sous la forme

$$\beta^i = \tilde{b} \tilde{s}^i - V^i \quad (9.13)$$

définissant le scalaire  $\tilde{b}$

$$\tilde{b} := \Psi^{-2} b. \quad (9.14)$$

## **9.3.2 Conditions de bord sur un horizon non-expansif**

La notion minimale d'horizon en quasi-équilibre est caractérisée par le concept d'horizon non-expansif. Ce premier niveau dans la hiérarchie des horizons isolés repose sur l'idée d'un horizon apparent évoluant en horizons apparents de même aire. En termes plus techniques, l'hypersurface  $\mathcal{H}$  générée par l'évolution temporelle d'une surface marginalement attrapée est une surface nulle.

### 9.3. CONDITIONS DE BORD D'HORIZONS ISOLÉS

En utilisant la décomposition conforme de la métrique  $\gamma$ , la condition d'horizon apparent  $\theta = 0$  peut s'écrire [74]

$$4\tilde{s}^k \tilde{D}_k \ln \Psi + \tilde{D}_k \tilde{s}^k + \Psi^{-2} K_{kl} \tilde{s}^k \tilde{s}^l - \Psi^2 K = 0. \quad (9.15)$$

L'équation (9.15) peut être vue comme une condition de bord mixte pour le facteur conforme  $\Psi$  dans la résolution de la contrainte hamiltonienne (9.3). Signalons simplement la présence de  $K_{kl} \tilde{s}^k \tilde{s}^l$ , un terme qui doit être contrôlé pour assurer la positivité du facteur conforme lors de la résolution de la contrainte hamiltonienne [48, 103].

Sur un horizon non-expansif, non seulement le scalaire de courbure  $\theta$  est nul mais aussi, d'après l'équation de Raychaudhuri, le tenseur de cisaillement  $\sigma_{\mu\nu}$  qui est la partie sans trace de la première forme fondamentale  $\Theta_{\mu\nu}$  de  $\mathcal{H}$ . En écrivant l'expression de  $\sigma$  sous une forme 2+1 conforme, il résulte que

$$\begin{aligned} 0 = & \underbrace{\left( \mathcal{L}_t \tilde{q}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\mathcal{L}_t \ln \tilde{q}) \tilde{q}^{\mu\nu} \right)}_{\text{I : données initiales libres}} + \underbrace{\left( {}^2\tilde{D}^\mu \tilde{V}^\nu + {}^2\tilde{D}^\nu \tilde{V}^\mu - ({}^2\tilde{D}_\rho V^\rho) \tilde{q}^{\mu\nu} \right)}_{\text{II : géométrie intrinsèque à } \mathcal{S}_t} \\ & + \underbrace{\left( N\Psi^{-2} - \tilde{b} \right) \left( \tilde{H}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \tilde{q}^{\mu\nu} \tilde{H} \right)}_{\text{III : géométrie extrinsèque à } \mathcal{S}_t} \end{aligned} \quad (9.16)$$

où  ${}^2\tilde{D}_\mu$  est la connection associée avec la métrique  $\tilde{q}_{\mu\nu}$  sur  $\mathcal{S}_t$ . Pour simplifier et suivant les prescriptions des Refs. [40, 41, 49, 89], nous annuleront les parties (I + II) et III indépendamment.

#### Annulation de (I + II)

La condition  $(I + II) = 0$  peut être vue, une fois fixées les données libres  $\dot{\tilde{\gamma}}$  sur une tranche spatiale  $\Sigma_t$  et par conséquent  $\mathcal{L}_t \tilde{q}$  fixé sur  $\mathcal{S}_t$ , comme une condition sur  $\mathbf{V}$ . Elle représente, d'après l'équation (9.13), une condition de bord pour la partie tangente aux surfaces  $\mathcal{S}_t$  du vecteur shift  $\beta$ . Comme on le remarque dans la section 1.2.4.3, pour des systèmes en équilibre ou en quasi-équilibre, il est naturel de choisir  $\dot{\tilde{\gamma}} = 0$ . Dans ce cas, la partie I est nulle et la condition  $(I + II) = 0$  signifie simplement que  $\mathbf{V}$  est un vecteur de Killing conforme de  $(\mathcal{S}_t, \tilde{\gamma}_{ij})$ , donnant une condition de type Dirichlet sur  $V^i$  une fois l'isométrie conforme choisie. On pourra par exemple choisir, si  $(\theta, \varphi)$  est un système de coordonnées de  $\mathcal{S}_t$

$$V^i = \Omega_0 (\partial_\varphi)^i, \quad (9.17)$$

où l'on impose une symétrie axiale  $(\partial_\varphi)$  sur  $\mathcal{S}_t$  et où  $\Omega_0$  est la vitesse angulaire de l'horizon associée au système de coordonnées  $(t, r, \theta, \varphi)$ .

#### Annulation de III

Si l'on choisit un système de coordonnées stationnaire par rapport à l'horizon alors les équations (9.7) et (9.14) impliquent automatiquement que le coefficient  $N\Psi^{-2} - \tilde{b}$  s'annule. On obtient donc une condition de bord de type Dirichlet pour la partie radiale du shift

$$\tilde{b} = N\Psi^{-2}, \quad (9.18)$$

qui ajoutée à  $(I + II) = 0$  garantit l'annulation du tenseur de déformation  $\sigma$ .

La condition de type Dirichlet précédente (9.18) pour la partie radiale du shift est bien motivée d'un point de vue numérique, le rayon coordonnée de l'horizon étant fixé pendant une évolution pour un système de coordonnées stationnaire par rapport à l'horizon. Cependant, dans ce cas, on perd le contrôle sur la valeur des dérivées radiales de  $\tilde{b}$  sur  $\mathcal{S}_t$ . En particulier cela signifie qu'on ne peut pas contrôler le signe de  $K_{kl}s^ks^l$ . Cela implique que la positivité du facteur conforme  $\Psi$  ne peut pas être garantie lors de la résolution de la contrainte hamiltonienne (9.3), puisque le signe de  $K_{kl}s^ks^l$  apparaissant dans la condition de bord (9.15) pour  $\Psi$  doit être contrôlé afin d'appliquer un principe de maximum à la contrainte hamiltonienne (Voir Ref. [49]). Comme solution alternative pour imposer l'annulation du tenseur de déformation  $\sigma$ , on peut choisir des données initiales pour lesquelles la partie sans trace de  $\tilde{H}^{ab}$  soit nulle

$$\left( \tilde{H}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{q}_{ab} \tilde{H} \right) = 0. \quad (9.19)$$

La condition de bord pour la partie radiale du shift est alors obtenue dans [49] en faisant une prescription sur la valeur de  $K_{kl}s^ks^l$  sur  $\mathcal{S}_t$

$$K_{kl}s^ks^l = f, \quad (9.20)$$

où  $f$  est une fonction sur  $\mathcal{S}_t$  qui peut être considérée comme une donnée libre sur  $\Sigma_t$ . En exprimant  $K_{kl}s^ks^l$  en terme de quantités 2+1, cette condition devient une condition de bord mixte (Dirichlet - Neumann) pour  $\tilde{b}$

$$2\tilde{s}^k \tilde{D}_k \tilde{b} - \tilde{b} \tilde{H} = 3Nf - {}^2\tilde{D}_k V^k + 2V^k {}^2\tilde{D}_{\tilde{s}} \tilde{s}_k - NK. \quad (9.21)$$

### 9.3.3 Conditions de bord sur un horizon faiblement isolé

Une fois les conditions géométriques  $\theta = 0 = \sigma$  imposées sur les surfaces  $\mathcal{S}_t$ , une 1-forme  $\omega_\mu$  satisfaisant  $\hat{\nabla}_\mu \ell^\nu = \omega_\mu \ell^\nu$  peut être intrinsèquement définie sur  $\mathcal{H}$  [12, 74], apportant une notion de gravité de surface  $\kappa_\ell = \ell^\mu \omega_\mu$  (voir section 4.5.3). Les horizons faiblement isolés, le niveau suivant dans la hiérarchie des horizons isolés, sont définis en demandant que ce nouvel objet soit indépendant du temps :  $\mathcal{L}_\ell \omega_\mu = 0$ , ou de manière équivalente que la gravité de surface soit constante sur  $\mathcal{H}$ ,  $\kappa_{(\ell)} = \text{const}$  [74].

D'un coté, en fixant la valeur constante  $\kappa_0$  de la gravité de surface, la caractérisation d'horizon faiblement isolé conduit à une équation d'évolution pour le lapse  $N$  sur  $\mathcal{H}$  [89]

$$\kappa_0 = \mathcal{L}_\ell \ln N + s^k D_k N - NK_{kl}s^ks^l. \quad (9.22)$$

Comme telle, cette équation peut être employée pour fixer les valeurs du lapse le long de l'horizon  $\mathcal{H}$  une fois sa valeur sur une tranche initiale choisie. En ce sens, l'équation (9.22) ne prescrit pas de condition de bord pour le lapse. Cependant, si un choix est effectué pour  $\mathcal{L}_\ell \ln N$ , cette équation devient une condition géométrique à satisfaire sur une tranche initiale  $\mathcal{S}_t$ , qui peut être

## 9.4. TROU NOIR SIMPLE

interprétée comme une condition de bord pour le lapse mais aussi comme une prescription de la valeur de  $K_{kl}s^k s^l$ .

Alternativement, fixer sur un horizon faiblement isolé la projection spatiale de la 1-forme  $\omega_\mu$ , appelée forme de Hájiček

$$\Omega_\mu = q^\rho{}_\mu \omega_\rho = {}^2D_\mu \ln N - K_{\rho\sigma} s^\rho q^\sigma{}_\mu \quad (9.23)$$

détermine un feuilletage de  $\mathcal{H}$  [9]. En fait, une fois la structure d'horizon non-expansif fixée, il suffit de prescrire la divergence de  $\Omega_\mu$ ,  ${}^2D^\mu \Omega_\mu = h$ , pour fixer le feuilletage et donc prescrire une fonction lapse [9, 74]

$${}^2\Delta \ln N = {}^2D^\rho (q^\mu{}_\rho K_{\mu\nu} s^\nu) + h. \quad (9.24)$$

Résoudre cette équation sur la surface  $\mathcal{S}$  fournit une condition de bord de type Dirichlet pour le lapse (une fois la fonction  $h$  choisie).

Finalement, les deux conditions de bord résultant de la structure d'horizon faiblement isolé (9.21) et (9.24) impliquent le choix d'une fonction libre sur  $\mathcal{S}$ . Cette liberté de jauge est une caractéristique essentielle de la construction des horizons isolés et ne peut pas être évitée dans ce cadre géométrique (elle revient au choix arbitraire du vecteur nul “dual”  $k^\mu$ , une fois le vecteur  $\ell^\mu$  fixé). Puisque la structure d'horizon non-expansif est suffisante pour fixer les conditions de bord du facteur conforme  $\Psi$  et du vecteur shift  $\beta^i$ , et que la structure d'horizon faiblement isolé semble reliée plus naturellement à la détermination de la valeur du lapse  $N$ , une approche naturelle consiste à identifier la valeur de  $N$  sur  $\mathcal{S}$  à la fonction de jauge, c'est-à-dire ajouter  $N|_{\mathcal{S}}$  à l'ensemble des données initiales libres du problème. C'est en fait naturel du point de vue de l'équation (9.22), où une valeur initiale de  $N$  est nécessaire à l'intégration du lapse le long de  $\mathcal{H}$ . Cette approche est adoptée dans les Refs. [5, 41]. Cependant, on maintient plutôt ici l'interprétation de cette liberté de jauge comme une fonction à spécifier pour certaines conditions de bord géométriques. De cette manière, on gagne la possibilité de combiner différemment l'ensemble des conditions de bord.

## 9.4 Trou noir simple

### 9.4.1 Méthode

Pour résoudre les équations elliptiques (9.3) - (9.5) pour le facteur conforme  $\Psi$ , le vecteur shift  $\beta^i$  et la fonction lapse  $N$ , on utilise les solveurs multi-domaines d'équations de Poisson scalaires et vectorielles pour des sources non-compactes décrites dans [28, 75], implémentés dans la bibliothèque C++ LORENE [98]. On utilise généralement 25x17x4 coefficients spectraux pour les coordonnées sphériques  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  pour les problèmes axisymétriques et 25x17x16 coefficients spectraux pour les problèmes non-axisymétriques. On décompose l'hypersurface  $\Sigma$  en quatre domaines, un noyau dont la surface externe coïncide avec la surface d'excision  $\mathcal{S}$ , deux coquilles sphériques et un domaine compactifié s'étendant jusqu'à l'infini spatial.

Dans les tests numériques discutés ici, on considère des données initiales libres satisfaisant  $\dot{\gamma}_{ij} = 0$  et  $\dot{K} = 0$ , correspondant à une prescription de quasi-équilibre. On choisit une métrique



conforme de la forme

$$\tilde{\gamma}_{ij} = A(f_{ij} + h_{ij}), \quad (9.25)$$

où  $f_{ij}$  est une métrique plate,  $h_{ij}$  un tenseur symétrique nul sur  $\mathcal{S}$  et  $A$  un facteur garantissant  $\det(\tilde{\gamma}_{ij}) = \det(f_{ij})$ . De cette manière, le vecteur  $V^i$  défini par l'équation (9.17) est toujours une symétrie conforme de  $\tilde{\gamma}_{ij}$ . On l'utilisera comme condition de bord pour la partie tangentielle du vecteur shift.

Pour tester les conditions de bord d'horizons isolés, on se concentre sur (i) l'étude de la dégénérescence des ensembles de conditions de bord, (ii) le test de la condition de bord (9.21) pour  $\tilde{b}$  proposée dans [49] et (iii) le test de nouvelles combinaisons de conditions de bord.

### 9.4.2 Dégénérescence de l'ensemble des conditions de bord

La table 9.1 montre comment les conditions d'horizons isolés introduites ci-dessus ont été interprétées comme conditions de bord pour les champs  $\Psi$ ,  $V^i$ ,  $\tilde{b}$  et  $N$ , d'après [40, 41, 49, 89]. Si on fixe les conditions de bord (9.15) et (9.17) pour  $\Psi$  et  $V^i$  respectivement, on peut combiner celles pour  $\tilde{b}$  et  $N$  pour obtenir différents ensembles de conditions de bord.

Dans la Ref. [41], il a été montré que l'ensemble des conditions de bord (9.15), (9.17), (9.18), et une condition sur  $N$  provenant de la prescription  $\mathcal{L}_\ell \theta_{(\hat{k})} = 0$  sur  $\mathcal{S}$  (avec  $\hat{k}^\mu = n^\mu + s^\mu$ ) (voir [40], une discussion sur son implémentation numérique dans [41] et aussi [9, 74] pour une perspective d'horizons isolés) est dégénérée, dans le sens où plusieurs solutions satisfont cet ensemble de conditions de bord. Le problème peut devenir bien posé si une de ces conditions de bord est remplacée par une condition effective. Choissant la condition de bord pour le lapse comme condition effective, un certain nombre de conditions de bord effective ont été successivement implémentées, menant à l'interprétation de la fonction  $N$  sur  $\mathcal{S}$  comme une donnée initiale libre. Signalons que la même conclusion a été évoquée ici, mais en termes de structure géométrique des horizons isolés, indépendamment du caractère bien posé du problème analytique. Pour comparer avec les conditions de bord d'horizons isolés, on considère une des conditions de bord effectives choisie dans [41] et une seconde imposant  $N$  à une constante sur  $\mathcal{S}$

$$N\Psi = \frac{1}{2} \quad (9.26)$$

$$N = \text{const} \quad (9.27)$$

De plus, il a été suggéré dans la Ref. [41] que la même dégénérescence devrait apparaître pour l'ensemble de conditions de bord (9.15), (9.17), (9.18) et (9.22) avec  $\mathcal{L}_\ell N = 0$  (ensemble

$\Psi$	$V^i$	$\tilde{b}$	$N$
(9.15)	(9.17)	(9.18)	(9.22)
		(9.21)	(9.24)

TAB. 9.1 – Correspondance entre les conditions de bord géométriques et les paramètres contraints, d'après [40, 41, 49, 89].

proposé par [89]). De façon à tester cette dégénérescence plus généralement, nous avons implémenté numériquement les différentes combinaisons de conditions de bord pour le lapse  $N$  et  $\tilde{b}$ . En principe, la dégénérescence du problème pourrait dépendre du choix concret des données initiales libres. C'est pourquoi, gardant  $\tilde{\gamma}_{ij} = 0 = \tilde{K}$ , nous avons considérés différentes valeurs pour le tenseur  $h_{ij}$  de l'expression (9.25) et pour  $K$  (incluant de larges déviations à l'axisymétrie). Finalement, nous avons implémenté différentes valeurs de  $f$  et  $h$  des équations (9.21) et (9.24) respectivement.

Nous en avons conclu que la combinaison (9.15), (9.17), (9.18) et (9.22) avec  $\mathcal{L}_\ell N = 0$  est bien dégénérée, comme avancé par [41]. Par contre, toutes les autres combinaisons, effectives ou non, permettent de déterminer une unique solution et ne sont donc pas dégénérées (voir le tableau 9.2).

### 9.4.3 Test de la condition de bord mixte pour $\tilde{b}$

Dans la Ref. [49], une étude analytique du caractère bien posé de la condition d'horizon apparent (9.15) a été réalisée. Il en résulte qu'une condition de symétrie de Killing conforme pour  $V^i$  et une condition de bord mixte (9.21) pour  $\tilde{b}$  sont des éléments suffisants garantissant le caractère bien posé de (9.15). Cependant, afin de pouvoir analyser le problème, un certain nombre de simplifications ont été faites. D'un coté, la condition de feuilletage maximal ( $K = 0$ ) a été supposée et, plus important, l'étude a été menée en décomposition conforme transverse et sans trace (voir chapitre 1) en se restreignant aux seules équations de contraintes, c'est-à-dire sans imposer d'équation pour le lapse. La situation devient nettement plus compliquée lorsque cette cinquième équation est incorporée et, d'après nos connaissances, aucune condition de bord garantissant le caractère bien posé du problème n'est connue. Par conséquent, un point important de ce chapitre est le test de la condition de bord (9.21), dans le formalisme sandwich conforme généralisé (incluant l'équation pour le lapse). Afin d'utiliser la condition de bord (9.21), la valeur de  $K_{kl}s^k s^l$  doit être prescrite sur  $\mathcal{S}$ . L'étude analytique dans [49] suggère d'employer  $K_{kl}s^k s^l \leq 0$  avec une valeur absolue bornée par la valeur de la courbure extrinsèque de  $\mathcal{S}$  dans  $\Sigma$  (voir [49] pour des détails), comme condition suffisante pour l'existence d'une solution.

Afin de tester cette condition, nous avons construits différentes fonctions effectives à partir de  $\Psi$  et  $N$  que nous avons utilisées comme valeurs de bord interne pour  $K_{kl}s^k s^l$  (pour des choix

	$N : (9.22)$	$N : (9.24)$	$N : (9.26)$	$N : (9.27)$
$\tilde{b} : (9.18)$	deg.	non deg.	non deg.	non deg.
$\tilde{b} : (9.21)$	non deg.	non deg.	non deg.	non deg.

TAB. 9.2 – Dégénérescence des différentes combinaisons de conditions de bord [gardant  $\Psi : (9.15)$  et  $V^i : (9.17)$ ].

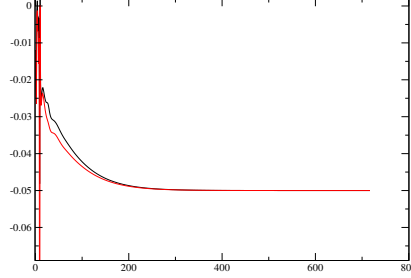


FIG. 9.1 – Valeurs maximum et minimum de  $K_{kl}s^k s^l$  pendant l’itération implémentant la condition de bord (9.21) avec  $K_{kl}s^k s^l = -0.05$ . La valeur prescrite n’est vérifiée qu’une fois la convergence atteinte.

mieux motivés physiquement, voir ci-dessous). La condition de bord est imposée à travers un schéma itératif, si bien que la valeur prescrite n’est obtenue qu’une fois une certaine convergence atteinte (voir Figure 9.1 pour un exemple où l’on impose simplement  $K_{kl}s^k s^l = -0.5$ ). L’implémentation numérique résultant de différentes prescriptions pour la valeur de  $K_{kl}s^k s^l|_S$  appuie fortement le caractère bien posé de la condition de bord (9.21) proposée par [49] dans la formulation sandwich conforme généralisée. Plus précisément, la figure 9.2 montre que même si de petites valeurs positives de  $K_{kl}s^k s^l|_S$  ont permis également de construire des solutions numériques, les valeurs absolue autorisées de  $K_{kl}s^k s^l|_S$  sont beaucoup plus grandes (typiquement un ordre de grandeur) pour des valeurs négatives, comme suggéré par les inégalités de [49].

#### 9.4.4 Autres combinaisons de conditions de bord

Jusqu’à présent, nous avons discuté les conditions de bord d’horizons isolés d’après les prescriptions de [40, 41, 49, 89] résumées dans la table 9.1. Cependant, un point important de l’approche des horizons isolés est le caractère géométrique des conditions de bord ainsi dérivées. En particulier, cela signifie qu’une condition de bord donnée n’est pas associée de manière unique à une fonction contrainte donnée et la table 9.1 ne représente alors qu’une partie des choix possibles. On illustre la flexibilité qui en résulte par deux exemples.

##### Exemple 1 :

L’équation (9.22) avec  $\mathcal{L}_\ell N = 0$  a été interprétée comme une condition de bord pour le lapse. En ce sens, nous devons choisir entre cette condition et la condition (9.24) comme prescription pour le lapse. Pourtant, l’équation (9.22) peut aussi être utilisée pour déterminer la valeur de  $K_{kl}s^k s^l$  sur  $S$  et par conséquent, via l’équation (9.21) comme une condition pour  $\tilde{b}$

$$K_{ij}s^i s^j = \frac{1}{N} (s^i D_i N - \kappa_o) \quad (9.28)$$

Puisqu’on a alors besoin d’une condition pour le lapse, l’équation (9.24) peut être simultanée-

#### 9.4. TROU NOIR SIMPLE

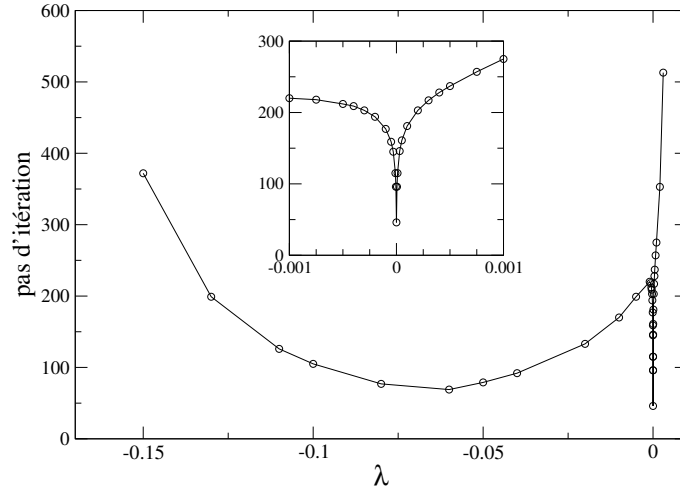


FIG. 9.2 – Nombre de pas d’itération neccessaires pour atteindre une convergence de  $10^{-8}$ , avec la condition de bord (9.21) supposant  $K_{kl}s^ks^l = \lambda\Psi/N$ .

ment imposée. Les figures 9.3 et 9.4 correspondent à l’implémentation numérique de l’ensemble complet des équations avec les conditions  $\Psi$  : (9.15),  $V^i$  : (9.17),  $\tilde{b}$  : (9.21)-(9.28) et  $N$  : (9.24). Ce calcul a été effectué en feuilletage maximal et avec une métrique conformément plate. En ce qui concerne la condition (9.24) pour le lapse, nous avons choisi une fonction de jauge  $h$  nulle et une constante d’intégration pour le laplacien sur  $\mathcal{S}$ ,  $C = \ln 0.2$ . La constante  $\kappa_0$  a été choisie égale à la gravité de surface d’un trou noir de Kerr,  $\kappa_o = \kappa_{Kerr}(R_{\mathcal{H}}, J_{\mathcal{H}})$ , où  $R_{\mathcal{H}}$  et  $J_{\mathcal{H}}$  sont respectivement le rayon et le moment cinétique de l’horizon (voir section 4.5.3.2).

##### Exemple 2 :

Comme second exemple, on peut utiliser la condition géométrique d’horizon apparent  $\theta = 0$ , équation (9.15), pour fixer la valeur de  $K_{kl}s^ks^l$  au lieu de l’interpréter comme une condition pour le facteur conforme  $\Psi$ . En effet, l’équation (9.15) peut être écrite comme

$$K_{kl}s^ks^l = K - \Psi^{-2} \left( 4\tilde{s}^k \tilde{D}_l \ln \Psi + \tilde{D}_k \tilde{s}^k \right) , \quad (9.29)$$

et en utilisant la condition (9.21), la valeur de  $K_{kl}s^ks^l$  ainsi déterminée peut être utilisée pour prescrire la condition de bord pour  $\tilde{b}$ . La condition d’horizon apparent est ainsi employée pour fixer la partie radiale du shift au lieu du facteur conforme, un important changement de perspective par rapport aux approches précédentes. Si on choisit l’équation (9.18) pour prescrire le lapse,  $N = b\Psi^2$ , et à nouveau la condition (9.17) pour  $V^i$ , on implémente un ensemble de conditions de bord de quasi-équilibre (horizons non-expansifs). Notons que le caractère effectif associé auparavant à la condition de bord pour le lapse est maintenant transféré à  $\Psi$ , puisqu’il peut être choisi librement. Comme application, si on est intéressé à une prescription de l’aire de l’horizon donnée par  $a_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{S}} \Psi^4 {}^{(2)}\tilde{\epsilon}$ , on peut simplement imposer une condition de type Dirichlet pour  $\Psi$ . Cela permet d’éviter un schéma itératif pour fixer l’aire.

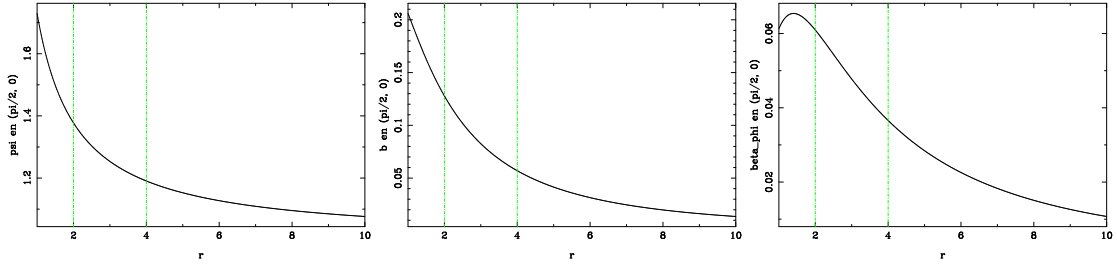


FIG. 9.3 – Profils du facteur conforme, de  $b$  et de  $\beta^\varphi$  selon l'axe ( $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ ). Les traits verticaux correspondent à la limite des différents domaines numériques utilisés, et l'horizon est situé à la distance coordonnée  $r = 1$ .

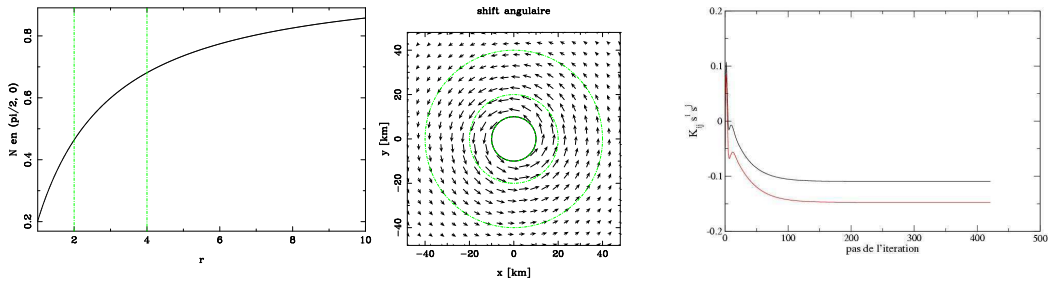


FIG. 9.4 – Profil du lapse  $N$  selon l'axe ( $\theta = \pi/2, \varphi = 0$ ), champ du vecteur  $V^i$  dans le plan  $(xy)$  et valeurs maximum et minimum de  $K_{kl}s^k s^l$  pendant l'itération. Les traits pointillés (en vert) correspondent à la limite des différents domaines numériques utilisés, et l'horizon est situé à la distance coordonnée  $r = 1$ .

### 9.4.5 Discussion

Il existe une ambiguïté intrinsèque dans les conditions de bord dérivées du formalisme des horizons isolés : une fonction de jauge libre doit être fixée au niveau des horizons faiblement isolés. En ce sens, une des conditions de bord de l'ensemble peut toujours être vue comme une condition de bord effective. Ici, nous avons montré que, bien qu'il soit naturel de choisir la condition de bord effective pour le lapse, il ne s'agit pas de la seule possibilité. En fait, la nature géométrique des conditions de bord permet d'établir différentes correspondances entre les conditions de bord et les paramètres contraints.

Nous avons implémenté numériquement les différentes combinaisons des conditions de bord proposées dans les Refs. [41, 49, 74, 89]. Nous avons vérifié que pour des choix génériques des fonctions de jauge, l'ensemble des conditions de bord ne sont en fait pas dégénérées. Cependant, un certain choix des fonctions libres conduit à un problème mal posé : l'implémentation des conditions (9.18) et (9.22) avec  $\mathcal{L}_\ell N = 0$  conduit à un ensemble dégénéré (comme avancé par [40]). Notons que ces conditions sont également effectives puisqu'un choix de  $\mathcal{L}_\ell N = 0$  doit être fait, même s'il est bien motivé. On peut se demander pourquoi cet ensemble particulier de conditions de bord effectives est dégénéré. Bien que, comme suggéré par [41], il s'agit probablement du fait que les conditions de quasi-équilibre ne suffisent pas d'elle mêmes à déterminer une unique solution, on ne peut fournir une explication catégorique. Dans tous les cas, nous pouvons conclure que la condition de bord (9.22) avec  $\mathcal{L}_\ell N = 0$ , vue indépendamment de l'ensemble, n'est pas mal posée.

Un important résultat est l'implémentation numérique de la condition de bord (9.21) proposée dans [49]. Nous avons montré qu'elle fournit une condition de bord bien posée dans l'approche sandwich conforme, incluant l'équation elliptique pour le lapse, allant bien au delà des résultats analytiques présentés dans [49]. L'utilisation de cette condition de bord permet de remanier certaines conditions de bord géométriques. En particulier, elle apporte un nouveau point de vue à la condition d'horizon apparent : mis à part une condition pour le facteur conforme, elle peut alternativement être vue comme une condition pour la partie radiale du shift. Finalement, nous avons présentés un ensemble de possibilités consistantes, parmi lesquelles un choix doit être fait pour un problème particulier.

## 9.5 Trous noirs binaires

### 9.5.1 Méthode

Les méthodes utilisées ici pour le calcul de binaires de trous noirs sur des orbites circulaires sont largement inspirées de Gourgoulhon *et al.* [71] et Grandclément *et al.* [76]. Explicitons quelques points importants.

#### *Méthodes numériques :*

Une stratégie similaire à celle utilisée pour les étoiles à neutrons binaires et décrite au chapitre 8 est utilisée ici pour résoudre les équations elliptiques (9.3), (9.4) et (9.5). On utilise deux systèmes de coordonnées de type sphériques  $(r_a, \theta_a, \varphi_a)$ ,  $a = 1$  ou  $2$ , centrés chacun sur le trou

noir  $a$ . Ceci afin de décrire plus précisément les sources des équations de Poisson, concentrées particulièrement autour des trous noirs. On utilisera  $25 \times 17 \times 16$  et  $33 \times 21 \times 20$  coefficients spectraux pour respectivement, la basse et haute résolution. Suivant la distance coordonnée entre les trous noirs, on prendra soit 7 soit 8 domaines pour chaque jeu de coordonnées, correspondant à un noyau dont la surface externe correspond à l'horizon du trou noir, 5 ou 6 coquilles sphériques et un domaine compactifié s'étendant jusqu'à l'infini spatial.

Chaque équation de Poisson  $\Delta F = S$  est décomposée en deux équations de Poisson

$$\Delta F_1 = S_1 \quad (9.30)$$

$$\Delta F_2 = S_2, \quad (9.31)$$

avec  $F = F_1 + F_2$  et  $S = S_1 + S_2$ ,  $S_1$  ( $S_2$ ) étant construit afin d'être concentré autour du trou noir 1 (2) et ainsi bien représenté par les coordonnées associées au trou noir respectif. Ces équations de Poisson sont alors résolues grâce aux solveurs multi-domaines d'équations de Poisson scalaires et vectorielles pour des sources non-compactes décrites dans [28, 75].

#### **Conditions de bord sur les horizons :**

Pour chacune des équations de Poisson (9.3), (9.4) et (9.5) on doit imposer des conditions de bord aux horizons de chaque trou noir. Par exemple, pour une équation de Poisson scalaire avec des conditions de bord interne de type Dirichlet, on doit résoudre les équations (9.30) et (9.31) pour chaque trou noir avec comme conditions de bord

$$F|_{\mathcal{S}_1} = B_1(\theta_1, \varphi_1) \quad (9.32)$$

$$F|_{\mathcal{S}_2} = B_2(\theta_2, \varphi_2), \quad (9.33)$$

où  $B_1$  et  $B_2$  sont des fonctions arbitraires des variables angulaires et  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  correspondent à la frontière interne de la première coquille, l'horizon des trous noirs.

Pour cela, on a recours à une méthode itérative. Au premier pas de l'itération, on résout les équations (9.30) et (9.31) avec les conditions de bord  $F_a|_{\mathcal{S}_a} = B_a$ ,  $a = 1$  ou  $2$ . Ainsi, la solution totale  $F = F_1 + F_2$  ne satisfait pas les conditions de bord (9.32) et (9.33). En effet,  $F|_{\mathcal{S}_1} = B_1 + F_2|_{\mathcal{S}_1}$  et  $F|_{\mathcal{S}_2} = B_2 + F_1|_{\mathcal{S}_2}$ . Au prochain pas de l'itération, on impose alors la condition de bord  $B'_1 = B_1 - F_2|_{\mathcal{S}_1}$  et  $B'_2 = B_2 - F_1|_{\mathcal{S}_2}$  et on résout à nouveau les équations (9.30) et (9.31). On répète cette procédure jusqu'à ce qu'une certaine convergence soit atteinte. On obtient ainsi une solution de (9.30) et (9.31) qui satisfait les conditions de bord de type Dirichlet (9.32) et (9.33) sur les horizons.

#### **Hypothèses et choix de jauge**

Nous supposons que les deux trous noirs sont sur des orbites circulaires avec une vitesse angulaire orbitale  $\Omega$ , négligeant ainsi l'émission d'ondes gravitationnelles. Cela revient à supposer l'existence d'un vecteur de Killing hélicoïdal dont la forme asymptotique est la suivante

$$\mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial t_\infty} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi_\infty}, \quad (9.34)$$

où  $\varphi_\infty$  est la coordonnée azimutale d'un observateur inertiel à l'infini.

## 9.5. TROUS NOIRS BINAIRES

Contrairement au cas d'un seul trou noir où nous avons considérés une métrique spatiale générale, nous supposons dans le cas binaire que la métrique est conformément plate. Nous nous plaçons de plus en feuilletage maximal.

### *Détermination de la vitesse orbitale $\Omega$ :*

La vitesse orbitale  $\Omega$  n'apparaît pas dans les équations (9.3), (9.4) et (9.5), mais seulement dans la condition de bord (9.17) pour le vecteur shift. Il se trouve que l'on peut trouver une solution  $(N, \Psi, \beta)$  des équations (9.3), (9.4) et (9.5) avec des conditions de bord données pour toute valeur de  $\Omega$ . Il est donc nécessaire de trouver une condition supplémentaire pour fixer la valeur de la vitesse orbitale.

Il a été proposé dans [71] de choisir la vitesse orbitale de telle sorte que le théorème du Viriel soit vérifié, qui revient à l'égalité entre les masses ADM et de Komar définies par

$$M_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi} \oint_{\infty} f^{km} f^{ln} (\mathcal{D}_l \gamma_{mn} - \mathcal{D}_m \gamma_{ln}) dS_k, \quad (9.35)$$

se réécrivant, en jauge de Dirac, et en particulier pour une métrique conformément plate

$$M_{\text{ADM}} = -\frac{1}{2\pi} \oint_{\infty} \mathcal{D}^k \Psi dS_k, \quad (9.36)$$

et pour la masse de Komar

$$M_K = \frac{1}{4\pi} \oint_{\infty} \mathcal{D}^k N dS_k. \quad (9.37)$$

On constate numériquement que cette condition fixe de manière unique la vitesse orbitale  $\Omega$ .

### 9.5.2 Conditions limites

Pour résoudre le système d'équations de Poisson (9.3), (9.4) et (9.5) pour le facteur conforme  $\Psi$ , le vecteur shift  $\beta^i$  et la fonction lapse  $N$ , nous devons imposer des conditions de bord, aussi bien sur les horizons des trous noirs qu'à l'infini spatial. On demande à la métrique d'être asymptotiquement plate, c'est-à-dire qu'elle corresponde à la métrique de Minkowski à l'infini. On impose donc les conditions suivantes, dans un système de coordonnées cotournantes

$$\Psi \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad r \rightarrow \infty \quad (9.38)$$

$$\beta \rightarrow \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \text{quand} \quad r \rightarrow \infty \quad (9.39)$$

$$N \rightarrow 1 \quad \text{quand} \quad r \rightarrow \infty \quad (9.40)$$

En ce qui concerne les conditions de bord sur les horizons, comme pour l'étude sur les trous noirs simples, nous souhaitons tester les différentes conditions explicitées à la section 9.3, et déterminer si les conditions dérivées du formalisme des horizons isolés sont bien adaptées à l'étude de trous noirs binaires quasi-stationnaires. Plus précisément, nous considérons la condition d'horizon apparent (9.15) généralement associée à la condition de bord pour le facteur



conforme, les équations (9.18) et (9.21) pour la partie radiale  $\tilde{b}$  du vecteur shift. Pour la partie  $V^i$  du shift tangente aux surfaces  $\mathcal{S}_a$ , nous imposons aux trous noirs un état de corotation, c'est-à-dire synchronisé avec le mouvement orbital :

$$V^i|_{\mathcal{S}_a} = 0, \quad a = 1 \text{ ou } 2. \quad (9.41)$$

Enfin, pour le lapse  $N$ , nous considérons les deux conditions géométriques dérivées de la structure d'horizon faiblement isolé (9.22) et (9.24) ainsi que les deux conditions effectives (9.26) et (9.27). La condition effective (9.27) fait apparaître deux catégories, suivant si la constante est nulle ou non.

Pour le moment, nous n'avons réussi à trouver de solution au système que pour la condition de bord (9.18) pour  $\tilde{b}$ . En fait, avec la condition (9.21) pour  $\tilde{b}$ , il nous est possible d'obtenir une solution pour chaque valeur de la vitesse orbitale mais le Viriel est strictement négatif pour chacune de ces valeurs de  $\Omega$ , et ce quelle que soit la condition de bord choisie pour le lapse. Cela nous empêche de considérer des combinaisons de conditions de bord comme cela est fait pour un seul trou noir à la section 9.4.4. Nous travaillons actuellement sur ce problème.

Nous sommes donc contraints de jouer uniquement avec la condition de bord pour le lapse, et à fixer l'équation (9.15) comme condition de bord pour  $\Psi$ , (9.18) pour  $\tilde{b}$  et (9.41) pour  $V^i$ . Comme pour le cas d'un seul trou noir, nous avons constaté que l'ensemble des conditions de bord (9.22), (9.15), (9.18) et (9.41) est dégénéré. Pour les trois autres conditions de bord pour le lapse, il a été possible de trouver une solution unique. En ce qui concerne la condition (9.27), nous avons considéré  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0$  et  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$ . Pour le premier cas, le lapse étant nul sur l'horizon, il est nécessaire d'effectuer une régularisation pour le vecteur shift afin de pouvoir calculer la courbure extrinsèque (9.1) (voir [76] pour plus de détails). Notons que, en imposant un lapse nul sur les horizons, nous avons retrouvé les résultats de [76], constituant un premier test de notre code numérique.

### 9.5.3 Tests

#### 9.5.3.1 Contrainte impulsienne

Le moment cinétique total sur une hypersurface  $\Sigma_t$  est défini par l'intégrale de surface à l'infini spatial [32, 159]

$$J = \frac{1}{8\pi} \oint_{\infty} (K^k_l - K f^k_l) \varphi^l dS_k, \quad (9.42)$$

où  $\varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi}$  est le vecteur de killing de la métrique plate  $\mathbf{f}$ , à laquelle la métrique spatiale  $\gamma$  est asymptotique. Sachant que le facteur conforme  $\Psi = 1$  à l'infini spatial, on peut écrire  $K^k_l \varphi^l = \Psi^6 \tilde{A}^{kl} f_{ln} \varphi^n$ . A l'aide du théorème de Gauss-Ostrogradski, on exprime alors  $J$  comme une intégrale de volume plus des intégrales de surfaces sur les horizons. L'intégrale de volume fait intervenir la quantité

$$\mathcal{D}_k (\Psi^6 \tilde{A}^{kl} f_{ln} \varphi^n) = \mathcal{D}_k (\Psi^6 \tilde{A}^{kl}) f_{kn} \varphi^n + \frac{1}{2} \Psi^6 \tilde{A}^{kl} [\mathcal{D}_k (f_{ln} \varphi^n) + \mathcal{D}_l (f_{kn} \varphi^n)] \quad (9.43)$$

## 9.5. TROUS NOIRS BINAIRES

Le premier terme du membre de droite est nul d'après la contrainte impulsienne (1.20) qui peut s'écrire dans le cas du vide et en feuilletage maximal

$$\mathcal{D}_k \left( \Psi^6 \tilde{A}^{ki} \right) = 0 \quad (9.44)$$

en vertu de l'identité

$$D_k K^{ik} = \Psi^{-10} \tilde{D}_k \left( \Psi^{10} K^{ik} \right). \quad (9.45)$$

Le second terme du membre de droite de l'équation (9.43) est nul également car  $\varphi$  est un vecteur de Killing de la métrique plate. Ainsi, le moment cinétique  $J$  se simplifie en une intégrale sur les horizons

$$J = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{S}_i} \Psi^6 \tilde{A}^{kl} f_{ln} \varphi^n d\bar{S}_k \quad (9.46)$$

où  $\bar{S}_k$  est l'élément de surface de la métrique plate orienté vers l'extérieur du trou noir.

Afin de tester si la contrainte impulsienne est bien satisfaite, on représente sur la figure 9.5 la différence relative entre le moment cinétique calculé à partir de l'intégrale à l'infini (Eq. (9.42)) et à partir de l'intégrale sur les horizons (Eq. (9.46)) en fonction de  $M_{\text{ir}}\Omega$  le long d'une séquence, où  $M_{\text{ir}}$  est la masse irréductible du système (voir ci-dessous pour une justification du choix de cette masse). Les deux séquences considérées pour cette figure correspondent aux conditions de bord pour le lapse  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0$  et  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$ . On remarque que l'erreur est plus faible pour la condition  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$  que pour un lapse nul sur l'horizon. En fait, il a été signalé dans [76] que l'erreur relative sur le moment cinétique est corrélée à la fonction de régularisation introduite pour le calcul de la courbure extrinsèque dans le cas où le lapse est nul sur l'horizon  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0$ , expliquant que l'erreur commise soit indépendante du nombre de coefficients dans ce cas. Cela peut expliquer dans le cas présent pourquoi la condition de lapse non nul satisfait mieux la contrainte impulsienne. On aurait même pu s'attendre à une meilleure précision. De plus, il est relativement surprenant que l'erreur ne décroisse pas plus franchement avec le nombre de coefficients utilisés. Cependant, cela reste tout à fait satisfaisant, l'erreur commise étant d'environ 1% au niveau de la dernière orbite stable situé aux alentours de  $M_{\text{ir}}\Omega = 0.1$  (voir section 9.5.4).

### 9.5.3.2 Formule de Smarr

On peut établir, à partir des équations de contraintes (1.19) et (1.20), de la trace des équations dynamiques (1.21) et (1.22), et quand  $\partial/\partial t$  est un vecteur de Killing, l'identité remarquable [52]

$$D^k \left( D_k N - K_{kl} \beta^l \right) = 0 \quad (9.47)$$

valable pour une métrique tout à fait générale, pas nécessairement conformément plate. Combinée avec le théorème de Green-Ostrogradski, l'équation (9.47) devient une formule ne faisant intervenir que des intégrales de surfaces

$$\oint_{\infty} \left( D_k N - K_{kl} \beta^l \right) dS^k = \sum_{a=1}^2 \oint_{\mathcal{S}_a} \left( D_k N - K_{kl} \beta^l \right) dS^k, \quad (9.48)$$

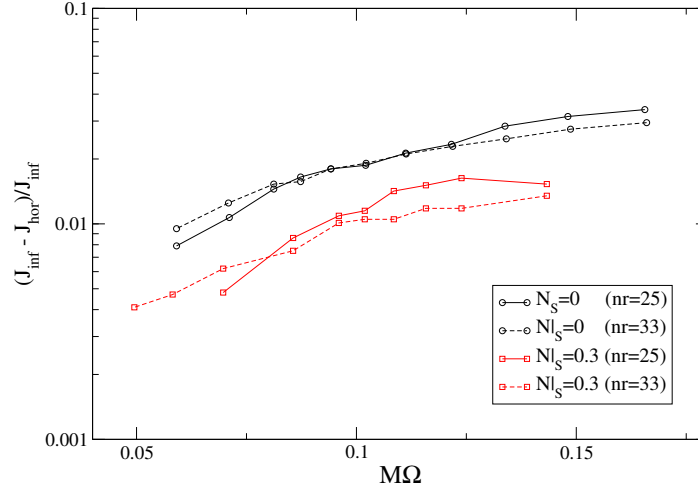


FIG. 9.5 – Différence relative entre le moment cinétique calculé par l’intégrale à l’infini (9.42) et par l’intégrale sur les horizons (9.46) pour les deux séquences ayant comme condition de bord pour le lapse  $N|_S = 0$  et  $N|_S = 0.3$ . Comparaison effectuée pour deux résolutions,  $n_r \times n_\theta \times n_\varphi = 33 \times 21 \times 20$  et  $25 \times 17 \times 16$ .

où par convention  $dS^k$  est orienté vers l’extérieur du trou noir. D’après l’équation (9.37), l’intégrale à l’infini de  $D_k N$  donne  $4\pi M_K$ . D’après l’équation (9.42) et la condition asymptotique du vecteur shift  $\beta^l \rightarrow_\infty \Omega \varphi^l$ , l’intégrale à l’infini de  $K_{kl} \beta^l$  donne  $8\pi \Omega J$ . Quand au vecteur shift apparaissant dans le membre de droite de l’équation (9.48), il est égal à  $\beta^l = b s^l$  pour un trou noir en corotation (voir les conditions (9.18) et (9.41)). On obtient donc

$$M_K - 2\Omega J = \frac{1}{4\pi} \sum_{a=1}^2 \oint_{S_a} (D_k N - b K_{kl} s^l) dS^k. \quad (9.49)$$

A l’aide de cette équation, on peut déterminer la valeur du moment cinétique qui satisfait la formule, une fois donnée les valeurs de la masse de Komar et de la vitesse angulaire. La figure 9.6 compare les valeurs du moment cinétique calculés à partir de l’intégrale à l’infini (9.42) et du moment cinétique provenant de la formule de Smarr (9.49), pour les deux conditions de bord déjà considérées pour le test précédent, à savoir  $N|_{S_a} = 0$  et  $N|_{S_a} = 0.3$ . On constate que la différence relative entre ces deux moments cinétiques est indépendante de la condition de bord choisie ainsi que du nombre de coefficients, et que la précision est d’environ  $5 \times 10^{-3}$ .

### 9.5.4 Séquences d’évolution

Pour des étoiles à neutrons binaires, une séquence de configurations quasi-stationnaires est obtenue en variant la distance coordonnée entre les étoiles et en maintenant fixe la masse baryonique. Pour des trous noirs, il n’existe pas d’équivalent. Il est donc nécessaire de définir une prescription pour caractériser une évolution. Dans [76], il est proposé de définir une séquence

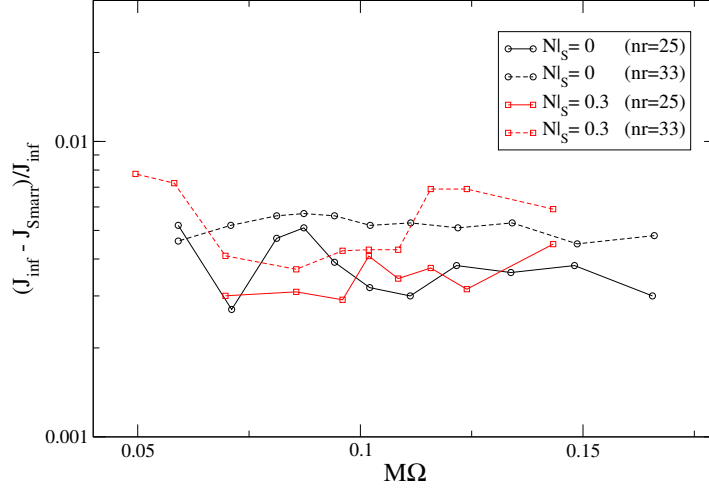


FIG. 9.6 – Différence relative entre le moment cinétique calculé par l'intégrale à l'infini (9.42) et le moment cinétique calculé à l'aide de la formule de Smarr (9.49), pour deux séquences ayant comme condition de bord pour le lapse  $N|_S = 0$  et  $N|_S = 0.3$ . Comparaison effectuée pour deux résolutions,  $n_r \times n_\theta \times n_\varphi = 33 \times 21 \times 20$  et  $25 \times 17 \times 16$ .

en demandant que les pertes d'énergie  $dM_{\text{ADM}}$  et de moment cinétique  $dJ$  dues à l'émission d'ondes gravitationnelles satisfont

$$\left. \frac{dM_{\text{ADM}}}{dJ} \right|_{\text{sequence}} = \Omega. \quad (9.50)$$

Cette condition est motivée par le fait qu'elle est exacte si on considère uniquement la formule du quadrupôle, et elle est également bien vérifiée par les systèmes binaires d'étoiles à neutrons [15, 141].

La condition (9.50) est équivalente à imposer que la masse irréductible du système définie par

$$M_{\text{ir}} = \sum_{i=1}^2 \sqrt{\frac{A_i}{16\pi}}, \quad (9.51)$$

est constante, où  $A_1$  et  $A_2$  sont les aires des horizons données par  $A_a = \int_S \Psi^4 {}^2\tilde{\epsilon}$ ,  $a = 1$  ou  $2$ . En effet, la première loi de la thermodynamique valable pour des trous noirs binaires dérivée dans [60], et également explicitée dans la section 4.4.4 pour des trous noirs isolés, s'écrit

$$dM_{\text{ADM}} = \Omega dJ + \kappa_1 dA_1 + \kappa_2 dA_2, \quad (9.52)$$

où  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont les gravités de surface des trous noirs 1 et 2. Imposer la condition (9.50) revient donc à imposer que l'aire des trous noirs et donc que la masse irréductible est constante durant une évolution.

De plus, on peut voir que si les quantités  $M_{\text{ADM}}$ ,  $J$  et  $\Omega$  correspondent à une solution alors les quantités  $M_{\text{ADM}}/\alpha$ ,  $J/\alpha^2$  et  $\alpha\Omega$  correspondent également à une solution. On choisit  $\alpha = M_{\text{ir}}$  de telle sorte que la séquence est caractérisée par  $M_{\text{ir}} = 1$  et toutes les quantités sont alors sans dimension.

Les figures 9.7, 9.8 et 9.9 montrent les valeurs des quantités sans dimension  $M_{\text{ADM}}/M_{\text{ir}} = \hat{M}$ ,  $J/M_{\text{ir}}^2 = \hat{J}$  et  $M_{\text{ir}}\Omega = \hat{\Omega}$  le long de chaque séquence, correspondant aux conditions de bord pour le lapse  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0$ ,  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$ ,  $N\Psi = 1/2$  et (9.24) avec une fonction de jauge  $h$  nulle et une constante d'intégration pour le laplacien sur  $\mathcal{S}_a$ ,  $C = \ln 0.2$ . Pour chacune de ces conditions de bord, on obtient un minimum de  $\hat{M}$  et  $\hat{J}$  lorsqu'on diminue la distance entre les trous noirs ou qu'on augmente  $\hat{\Omega}$ , définissant une dernière orbite stable. On remarque qu'on obtient une légère différence sur la position de cette dernière orbite stable entre la condition de lapse nul sur l'horizon et les trois autres conditions de bord, probablement due à la régularisation du shift effectuée dans ce premier cas. Comme l'ont également montré Cook & Pfeiffer [41], la condition de bord pour le lapse a très peu d'effet sur la solution, si l'on exclu la condition  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0$ . Les valeurs des paramètres pour la configuration correspondant à l'ISCO sont en bon accord avec les résultats numériques de [41], comme le montre le tableau 9.3 et la figure 9.10, où l'on a défini l'énergie de liaison  $E_b$  comme

$$E_b = M_{\text{ADM}} - M_{\text{ir}} \quad (9.53)$$

Les figures 9.11, 9.12 et 9.13 montrent les isocontours des différents champs métriques dans le plan orbital  $z = 0$ . Tous ces figures correspondent à la condition de bord pour le lapse  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$  pour la configuration à la dernière orbite stable. On remarque que, contrairement au cas d'un lapse nul sur les horizons, ces isocontours ne présentent pas de symétrie par rapport à l'axe  $y = 0$ , du fait de la condition de bord pour le shift qui présente une composante radiale sur les horizons.

## 9.6 Conclusion

Le formalisme des horizons isolés développé par Ashtekar *et al.* [12] fournit un cadre particulièrement bien adapté pour l'étude de trous noirs en quasi-équilibre dans un espace-temps dynamique. À l'aide de cette approche, un certain nombre de conditions de bord ont été exhibées [41, 49, 74, 89]. Il s'avère qu'il existe une ambiguïté intrinsèque dans ces conditions de bord, une fonction de jauge libre devant être fixée au niveau des horizons faiblement isolés. Cela signifie que pour chaque ensemble de conditions de bord, une des conditions peut toujours être vue comme effective. Nous avons montré que, bien qu'il soit naturel de choisir la condition effective pour le lapse — la seule option rencontrée dans la littérature, ce n'est pas un choix unique et la nature géométrique des conditions de bord permet en fait de réaliser différentes correspondances entre les paramètres contraints et les conditions de bord.

Un résultat important de l'étude pour un seul trou noir est la nature bien posée de la condition de bord pour la partie radiale du shift proposée par Dain *et al.* [49] dans le formalisme sandwich conforme généralisé. L'utilisation de cette condition permet de réinterpréter certaines conditions de bord géométriques. En particulier, la condition d'horizon apparent peut être vue,

## 9.6. CONCLUSION

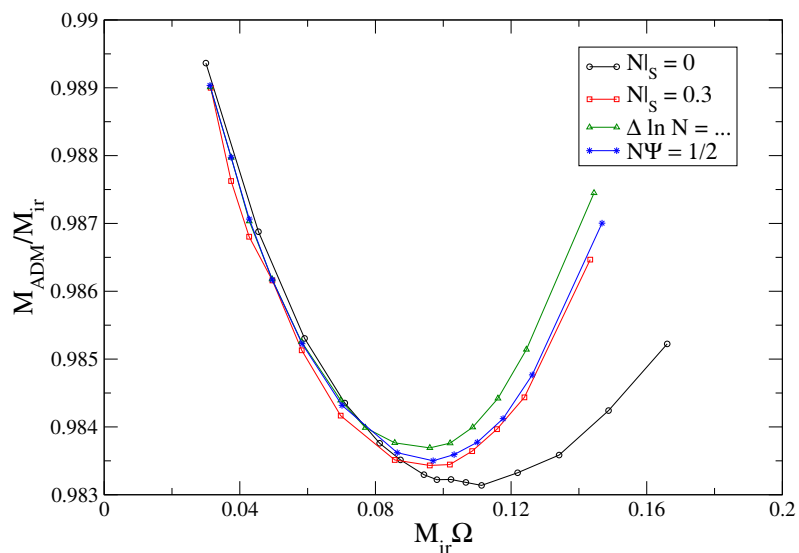


FIG. 9.7 – Masse ADM en fonction de  $M_{ir}\Omega$  le long des séquences correspondant aux quatre conditions de bord pour le lapse considérées.

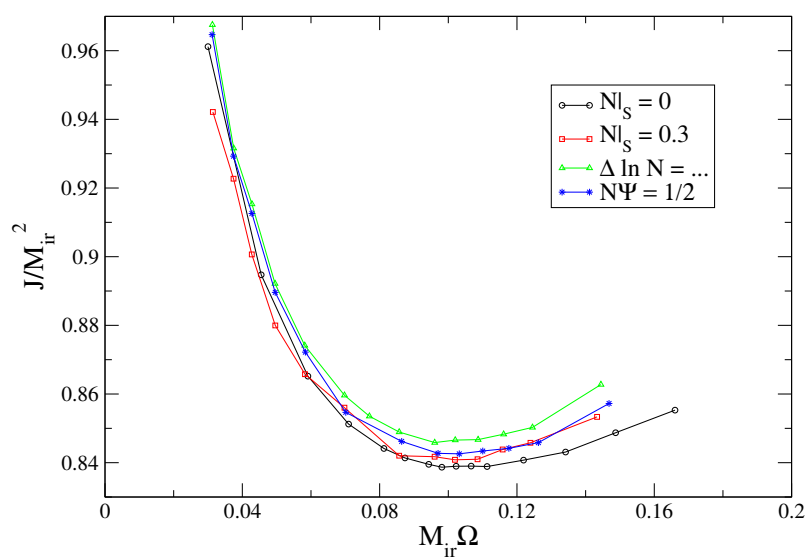


FIG. 9.8 – Moment cinétique en fonction de  $M_{ir}\Omega$  le long des séquences correspondant aux quatre conditions de bord pour le lapse considérées.

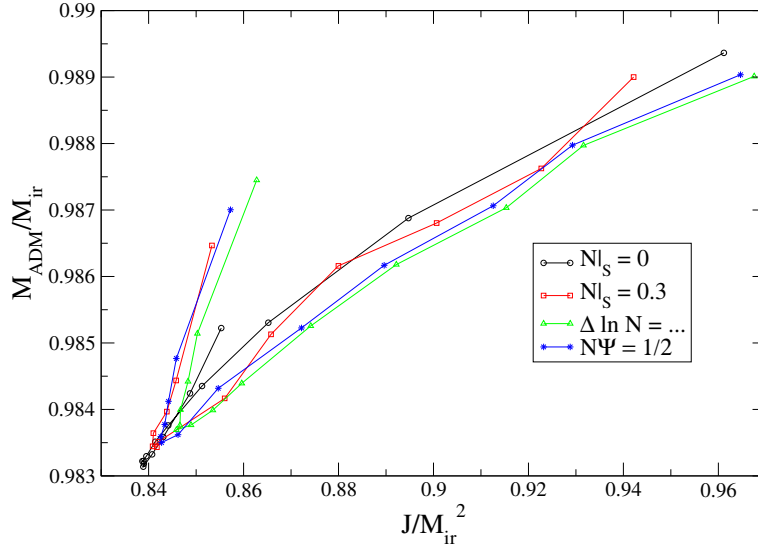


FIG. 9.9 – Masse ADM en fonction du moment cinétique le long des séquences correspondant aux quatre conditions de bord pour le lapse considérées.

Lapse $N$	$M_{\text{ir}}\Omega$	$E_b/M_{\text{ir}}$	$J/M_{\text{ir}}$
$N _{\mathcal{S}_a} = 0$	0.111	-0.0167	0.839
$N _{\mathcal{S}_a} = 0.3$	0.096	-0.0167	0.842
(9.24)	0.098	-0.0166	0.846
$N\Psi = 1/2$	0.098	-0.0166	0.843
GGB [76]	0.103	-0.017	0.839
CP [41]	0.106	-0.0165	0.843
3PN EOB	0.0979	-0.0157	0.860
3PN standard	0.0915	-0.0153	0.867

TAB. 9.3 – Paramètres à la dernière orbite stable pour les quatre conditions de bord pour le lapse puis comparaison avec les résultats de trous noirs binaires en corotation de Grandclement *et al.* [76] (GGB), de Cook & Pfeiffer [41] (CP), et les résultats post-newtoniens de Damour *et al.* [50] (3PN EOB) et de Blanchet [21] (3PN standard).

## 9.6. CONCLUSION

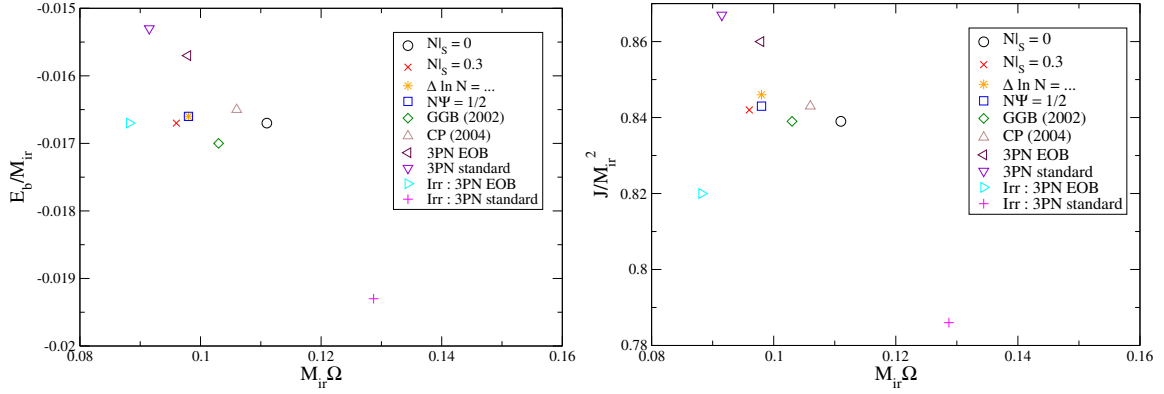


FIG. 9.10 – Paramètres à la dernière orbite stable pour les quatre conditions de bord pour le lapse puis comparaison avec les résultats de Grandclement *et al.* [76] (GGB), de Cook & Pfeiffer [41] (CP), et les résultats post-newtoniens de trous noirs en corotation et irrotationnels de Damour *et al.* [50] (3PN EOB) et de Blanchet [21] (3PN standard).

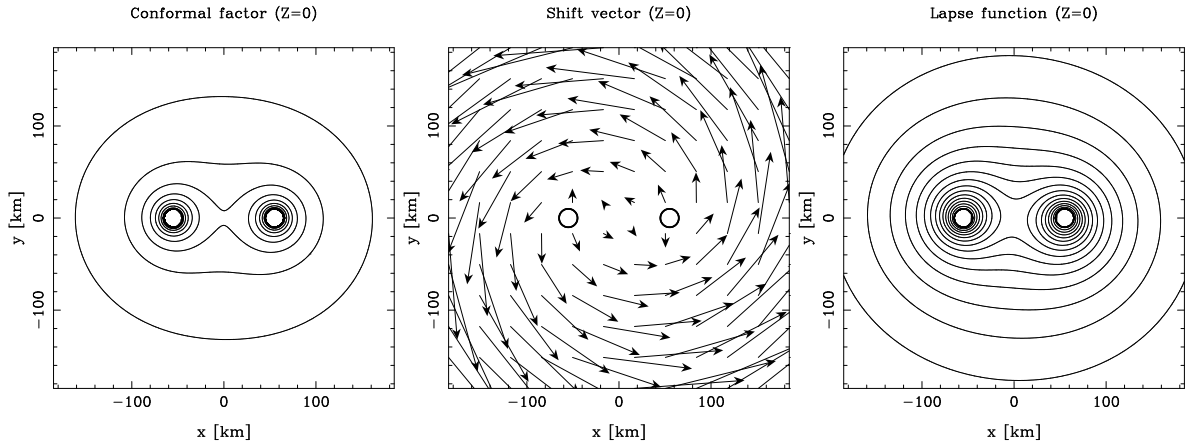


FIG. 9.11 – Isocontours du facteur conforme  $\Psi$  et de la fonction lapse  $N$  et allure du vecteur shift  $\beta$ , pour la configuration à la dernière orbite stable dans le plan orbital  $z = 0$  et pour la condition de bord pour le lapse  $N|_{S_a} = 0.3$ . Les traits pleins épais indiquent l'horizon des trous noirs. L'échelle des axes correspond à une masse ADM de  $31.8M_\odot$ .



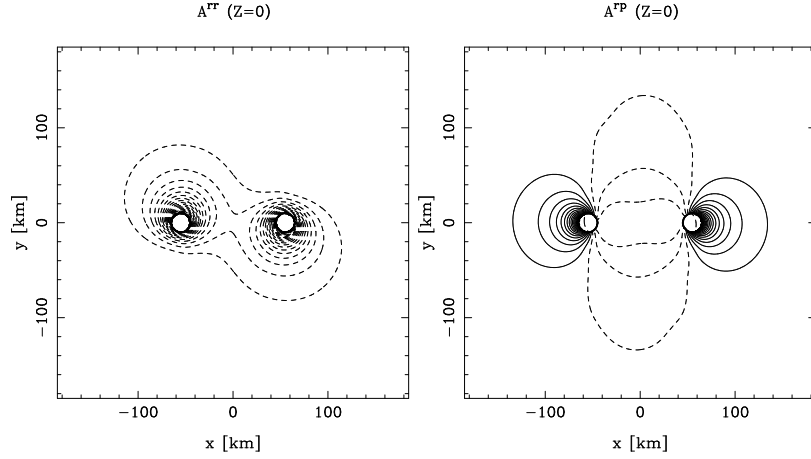


FIG. 9.12 – Isocontours des composantes  $A^{rr}$  et  $A^{r\varphi}$  de la courbure extrinsèque pour la configuration à la dernière orbite stable dans le plan orbital  $z = 0$  et pour la condition de bord pour le lapse  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$ . Les traits pleins épais indiquent l’horizon des trous noirs. L’échelle des axes correspond à une masse ADM de  $31.8M_\odot$ .

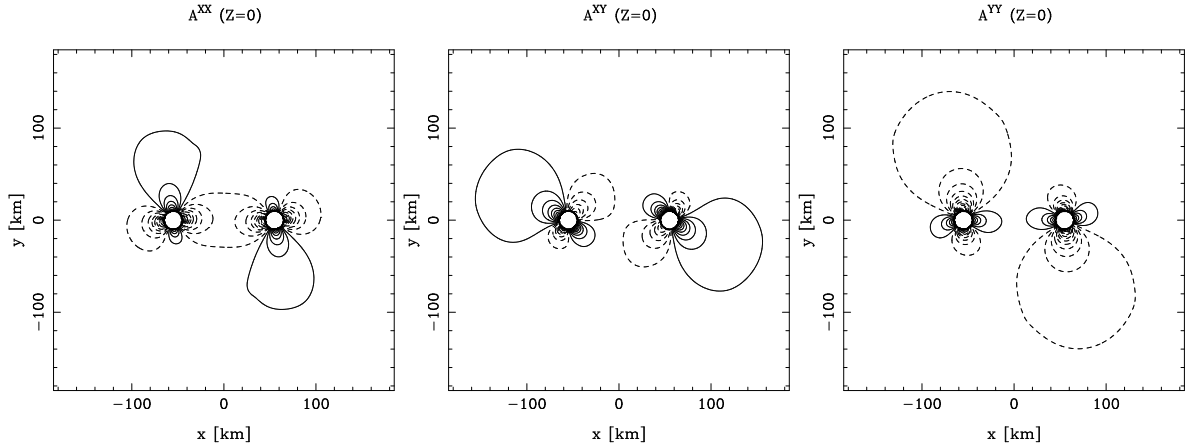


FIG. 9.13 – Isocontours des composantes  $A^{xx}$ ,  $A^{yy}$  et  $A^{xy}$  de la courbure extrinsèque pour la configuration à la dernière orbite stable dans le plan orbital  $z = 0$  et pour la condition de bord pour le lapse  $N|_{\mathcal{S}_a} = 0.3$ . Les traits pleins épais indiquent l’horizon des trous noirs. L’échelle des axes correspond à une masse ADM de  $31.8M_\odot$ .

en dehors d'une condition pour le facteur conforme, comme une condition de bord pour la partie radiale du shift. Finalement, il existe un certain nombre d'ensembles de conditions de bord consistantes, parmi lesquels un choix doit être effectué pour chaque problème particulier. Cependant, il est difficile de déterminer quel ensemble de conditions est le mieux adapté, quelles sont leurs avantages les uns par rapport aux autres, d'après notre étude portant sur un seul trou noir.

Par contre, le problème des trous noir binaires quasi-stationnaires est typiquement bien adapté pour une critique de ces ensembles de conditions de bord. Il est possible de déterminer, pour une configuration donnée, si ces conditions respectent bien l'état de quasi-équilibre, par exemple en calculant la valeur de  $\partial_t \Psi$ . Il est également intéressant d'étudier leur effet sur la fréquence et l'énergie de liaison à la dernière orbite stable. Cependant, jusqu'à présent, nous n'avons pas réussi à trouver de solutions pour la condition de bord pour la partie radiale du shift proposée par [49], perdant ainsi toute la liberté du choix des paramètres contraints pour une condition de bord géométrique donnée. Nous n'avons obtenu de séquences qu'avec la condition pour la partie radiale du shift (9.18) provenant de l'hypothèse de coordonnées stationnaires par rapport à l'horizon — seule condition étudiée dans la littérature pour des binaires [40, 41, 76], et avons retrouvé le résultat de [41], c'est-à-dire que la solution obtenue ne dépend pas de la condition de bord pour le lapse choisie.

La condition de bord (9.21) proposée par Dain *et al.* [49] étant bien posée pour le cas d'un seul trou noir, nous ne voyons pas de raison particulière pour qu'elle ne soit pas adaptée pour des binaires. À très court terme, nous allons donc essayé d'exhiber des solutions obtenues à l'aide de cette condition de bord et ainsi étudier les différents ensembles de conditions de bord. Cependant, obtenir des conditions de bord appropriées n'est pas l'issue finale dans la construction de données initiales de trous noirs binaires astrophysiquement réalistes. Une question clef est comment choisir d'une façon réaliste la métrique spatiale conforme. Même si les erreurs introduites par l'approximation de métrique conformément plate ne sont pas si importantes, il est clair que ce serait plus satisfaisant de laisser la physique dicter la géométrie spatiale conforme plutôt que de la choisir à priori. Pour cela, une possibilité serait de s'inspirer du travail effectué au chapitre 8 sur les étoiles à neutrons binaires, et de déterminer des conditions de bord à partir du formalisme d'horizons isolés, pour les variables dynamiques.



# Conclusion

L'objectif de cette thèse est, comme annoncé, de contribuer à l'étude des sources de rayonnement gravitationnel, et plus précisément à la connaissance théorique via la modélisation numérique de configurations de binaires composées soit d'étoiles à neutrons, d'étoiles étranges ou de trous noirs. Les signaux gravitationnels attendus au niveau de la Terre étant extrêmement faibles, il est en effet nécessaire d'avoir une connaissance à priori de ce que l'on cherche pour permettre un filtrage du signal et l'extraire des intenses sources de bruit. On rappelle ici les principaux résultats de ce travail ainsi que les diverses perspectives envisagées.

Les premières séquences d'évolution d'étoiles de quarks étranges binaires ont été obtenues, dans l'approximation IWM de la relativité générale. Deux types d'équation d'état, le modèle du sac MIT et le modèle de Dey *et al.* (1998), ont été utilisées pour décrire ces étoiles. La fin de chaque séquence de quasi-équilibre, la dernière orbite stable, correspond à une instabilité dynamique quelles que soient la masse totale du système binaire et le paramètre de compacité des étoiles étranges, alors qu'il est caractérisé par la limite de perte de masse pour des binaires d'étoiles à neutrons décrites par une équation d'état baryonique ou polytropique. La fréquence des ondes gravitationnelles à la dernière orbite stable est une fonction quasi-linéaire de la compacité des étoiles, et ce pour chaque équation d'état. Plus l'étoile est compacte et plus la fréquence des ondes gravitationnelles est grande. Alors que l'évolution de binaires d'étoiles à neutrons décrites par des équations d'état réalistes peut être prédit, avec une bonne approximation, par l'étude de binaires d'étoiles à neutrons polytropiques d'indices  $\gamma = 2$  ou  $2.5$  [18], ce n'est pas le cas des étoiles de quarks étranges binaires. On l'explique par le fait qu'elles sont liées principalement par l'interaction forte entre les quarks, et ont donc un indice adiabatique très grand près de la surface de l'étoile. Il se trouve alors que la fréquence des ondes gravitationnelles à la fin de la séquence de quasi-équilibre est environ 150 Hz plus grande pour des étoiles étranges binaires que pour des binaires d'étoiles à neutrons polytropiques de même masse et même compacité. Étant un des paramètres potentiellement observables par les détecteurs interférométriques, cette fréquence caractéristique donnera d'importantes contraintes sur l'équation d'état des objets compacts et pourrait permettre de distinguer entre étoiles à neutrons et étoiles de quarks étranges.

Il serait intéressant de poursuivre ce travail par l'étude de binaires composées d'une étoile étrange et une étoile à neutrons, l'évolution sera t'elle essentiellement dictée par l'étoile de quarks étranges ou l'étoile à neutrons ? Nous projetons également de considérer des binaires de masses non identiques, en l'occurrence un rapport de masse de 0.7, correspondant à un pic de la distribution des étoiles à neutrons binaires observables [33].

D'un autre coté, nous avons calculés les premières configurations de binaires d'étoiles à

## CONCLUSION

---

neutrons polytropique d'indice  $\gamma = 2$ , au delà de l'approximation IWM. Le système complet des équations d'Einstein est résolu, en jauge de Dirac et feuilletage maximal, les dérivées temporelles des variables dynamiques étant tronquées à partir d'une certaine distance des étoiles afin de retrouver une métrique asymptotiquement plate et une masse ADM bien définie. Les résultats obtenus sont en très bon accord avec ceux obtenus en parallèle et numériquement par K. Uryu [140] et également avec les résultats post-newtoniens de Asada *et al.* [7]. On obtient typiquement une déviation à la métrique plate de l'ordre de 1 % pour des étoiles à neutrons peu compactes,  $M/R = 0.12$ , et proches de la dernière orbite stable.

Les séquences d'évolution de binaires irrotationnelles ont montré que l'énergie de liaison ainsi que le moment cinétique total se voient assez nettement déviés des résultats IWM comparativement à l'écart entre les résultats à l'ordre 3PN et de l'approximation IWM. Les solutions ainsi calculées prenant en compte les termes non-conformément plat de la métrique devraient être des solutions de quasi-équilibre plus précises que celles obtenues à l'aide de l'approximation IWM. Elles peuvent notamment être utilisées comme conditions initiales pour la phase de coalescence. Ce travail sera naturellement suivi d'une étude pour d'autres équations d'état de la matière nucléaire, indice polytropique plus grand ou même matière de quarks étranges, pour lesquelles les séquences de quasi-équilibre terminent par une instabilité dynamique, permettant notamment de déterminer la précision de l'approximation IWM sur la fréquence des ondes gravitationnelles à la dernière orbite stable.

Dans une troisième partie, nous avons étudiés l'influence des conditions de bord aux horizons des trous noirs. Pour chaque ensemble de conditions de bord, une des conditions peut être vue comme effective. Bien qu'il soit naturel de choisir cette condition effective pour le lapse, d'après la nature géométrique des conditions de bord, dérivées du formalisme des horizons développé par Ashtekar *et al.* [12], il ne s'agit pas de l'unique possibilité. Un résultat important de notre étude pour un seul trou noir est l'implémentation numérique montrant la nature bien posée de la condition de bord pour la partie radiale du shift proposée par Dain *et al.* [49] dans le formalisme sandwich conforme généralisé. L'utilisation de cette condition permet de réinterpréter certaines conditions de bord géométriques. En particulier, la condition d'horizon apparent peut être vue, en dehors d'une condition pour le facteur conforme, comme une condition de bord pour la partie radiale du shift. Finalement, il existe un certain nombre d'ensembles de conditions de bord consistantes, parmi lesquels un choix doit être effectué pour chaque problème particulier.

Les configurations de binaires de trous noirs n'ont été obtenues qu'avec la condition pour la partie radiale du shift provenant de l'hypothèse de coordonnées stationnaires par rapport à l'horizon — seule condition étudiée dans la littérature pour des trous noirs binaires [40, 41, 76]. Il n'a donc pas été possible d'exploiter la liberté du choix des paramètres contraints pour une condition de bord géométrique donnée, mentionnée ci-dessus. Cependant, nous avons montré que la solution est indépendante de la condition de bord effective pour le lapse choisie, conformément aux résultats de Cook & Pfeiffer [41]. À court terme, il serait intéressant d'exhiber des solutions de trous noirs binaires quasi-stationnaires obtenues à l'aide de la condition de bord pour la partie radiale du shift proposée par Dain *et al.* [49]. Cela permettrait d'étudier les différents ensembles de conditions de bord, de déterminer si ces conditions respectent bien l'hypothèse de quasi-équilibre, ou encore d'étudier leur effet sur la fréquence et l'énergie de

## CONCLUSION

---

liaison à la dernière orbite stable. Il est également envisagé de poursuivre ce travail considérant différents choix des données initiales libres et notamment essayer de déterminer d'une façon réaliste la métrique spatiale conforme. Même si les erreurs introduites par l'approximation de métrique conformément plate ne sont pas si importantes, il est clair que ce serait plus satisfaisant de laisser la physique dicter la géométrie spatiale conforme, comme nous l'avons fait pour des binaires d'étoiles à neutrons, plutôt que de la choisir à priori.

## *CONCLUSION*

---

# Bibliographie

- [1] C. Alcock, E. Farhi, et A. Olinto, *Strange stars*, *Astrophys. J.*, **310**, 261 (1986).
- [2] P. Amsterdamski, T. Bulik, D. Gondek-Rosińska, et W. Kluźniak, *Marginally stable orbits around Maclaurin spheroids and low-mass quark stars*, *Astron. Astrophys.*, **381**, L21 (2002).
- [3] N. Anderson, *A new class of unstable modes of rotating relativistic stars*, *Astrophys. J.*, **502**, 708 (1998).
- [4] Z. Andrade, C. Beetle, A. Blinov, B. Bromley, L.M. Burko, M. Cranor, R. Owen et R.H. Price, *The Periodic Standing-Wave Approximation : Overview and Three Dimensional Scalar Models*, *Phys. Rev. D*, **70**, 064001 (2004).
- [5] M. Ansorg, *Double-domain spectral method for black hole excision data*, *Phys. Rev. D*, **72**, 024018 (2005).
- [6] H. Asada et M. Shibata, *Formulation for nonaxisymmetric uniformly rotating equilibrium configurations in the second post-Newtonian approximation of general relativity*, *Phys. Rev. D*, **54**, 4944 (1996).
- [7] H. Asada, M. Shibata et T. Futamase, *Post-Newtonian Hydrodynamic Equations Using the  $(3 + 1)$  Formalism in General Relativity*, *Progress of Theoretical Physics*, **96**, vol. 1, 81 (1996).
- [8] A. Ashtekar, C. Beetle et J. Lewandowski, *Mechanics of rotating isolated horizons*, *Phys. Rev. D*, **64**, 044016 (2001).
- [9] A. Ashtekar, C. Beetle et J. Lewandowski, *Geometry of rotating isolated horizons*, *Class. Quantum Grav.*, **19**, 1195 (2002).
- [10] A. Ashtekar, J. Engle et T. Pawłowski, *Multipoles moments of isolated horizons*, *Class. Quantum Grav.*, **21**, 2549 (2004).
- [11] A. Ashtekar, S. Fairhurst et B. Krishnan, *Isolated horizons : Hamiltonian evolution and the first law*, *Phys. Rev. D*, **62**, 104025 (2000).
- [12] A. Ashtekar et B. Krishnan, *Isolated and dynamical horizons and their applications*, *Living Rev. Relativity*, **7**, 10 (2004).
- [13] M. Baldo, I. Bombaci, G.F. Burgio, *Microscopic nuclear equation of state with three-body forces and neutron star structure*, *Astron. Astrophys.*, **328**, 274 (1997).



- [14] T.W. Baumgarte, G.B. Cook, M.A. Scheel, S.L. Shapiro, et S.A. Teukolsky, *Binary Neutron Stars in General Relativity : Quasiequilibrium Models*, Phys. Rev. Lett., **79**, 1182 (1997).
- [15] T.W. Baumgarte, G.B. Cook, M.A. Scheel, S.L. Shapiro, et S.A. Teukolsky, *General relativistic models of binary neutron stars in quasiequilibrium* Phys. Rev. Lett., **57**, 7299 (1998).
- [16] T.W. Baumgarte et S.L. Shapiro, *Numerical integration of Einstein's field equations*, Phys. Rev. D, **59**, 024007 (1999).
- [17] T. W. Baumgarte et S. L. Shapiro, *Numerical relativity and compact binaries*, Phys. Rep., **376**, 41 (2003).
- [18] M. Bejger, D. Gondek-Rosińska, E. Gourgoulhon, P. Haensel, K. Taniguchi, et J. L. Zdunik, *Impact of the nuclear equation of state on the last orbits of binary neutron stars*, Astron. Astrophys., **431**, 297 (2005).
- [19] K. Belczynski, V. Kalogera, et T. Bulik, *A Comprehensive Study of Binary Compact Objects as Gravitational Wave Sources : Evolutionary Channels, Rates, and Physical Properties*, Astrophys. J., **572**, 407 (2002).
- [20] L. Bildsten et C. Cutler, *Tidal interactions of inspiraling compact binaries*, Astrophys. J., **400**, 175 (1992).
- [21] L. Blanchet, *Innermost circular orbit of binary black holes at the third post-Newtonian approximation*, Phys. Rev. D, **65**, 124009 (2002).
- [22] L. Blanchet, *Gravitational Radiation from Post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries*, Living Rev. Relativity, **5**, 3 (2002).
- [23] L. Blanchet, T. Damour, B.R. Iyer, C.M. Will, A.G. Wiseman et Alan G., *Gravitational Radiation Damping of Compact Binary Systems to Second Post-Newtonian Order*, Phys. Rev. Lett., **74**, 3515 (1995).
- [24] A. R. Bodmer, *Collapsed Nuclei*, Phys. Rev. D, **4**, 061601 (1971).
- [25] I. Bombaci, *A possible signature for quark deconfinement in the compact star in 4U 1828–34*, preprint, astro-ph/0307522 (2003).
- [26] S. Bonazzola, J. Friebe, et E. Gourgoulhon, *Spontaneous Symmetry Breaking of Rapidly Rotating Stars in General Relativity*, Astrophys. J., **460**, 379 (1996).
- [27] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, P. Grandclément et J. Novak, *Constrained scheme for the Einstein equations based on the Dirac gauge and spherical coordinates*, Phys. Rev. D, **70**, 104007 (2004).
- [28] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, et J.-A. Marck, *Relativistic formalism to compute quasiequilibrium configurations of nonsynchronized neutron star binaries*, Phys. Rev. D, **56**, 7740 (1997).
- [29] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, et J.-A. Marck, *Numerical approach for high precision 3D relativistic star models*, Phys. Rev. D, **58**, 104020 (1998).

- [30] S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, et J.-A. Marck, *Numerical Models of Irrotational Binary Neutron Stars in General Relativity*, Phys. Rev. Lett., **82**, 892 (1999).
- [31] R.H. Boyer et R.W. Lindquist, *Maximal analytic extension of the Kerr metric*, Journal of Math. Phys., **8**, 265 (1967).
- [32] J.D. Brown et J.W. York, *Quasilocal energy and conserved charges derived from the gravitational action*, Phys. Rev. D, **47**, 1407 (1993).
- [33] T. Bulik, D. Gondek-Rosińska, K. Belczynski, *Expected masses of merging compact object binaries observed in gravitational waves*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **352**, 1372 (2004).
- [34] A. Buonanno et T. Damour, *Transition from inspiral to plunge in binary black hole coalescences*, Phys. Rev. D, **62**, 064015 (2000).
- [35] Burgay, M., et al., *An increased estimate of the merger rate of double neutron stars from observations of a highly relativistic system*, Nature, **426**, 531 (2003).
- [36] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni et T.A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag (1988).
- [37] B. Carter, *Properties of the Kerr metric*, dans DeWitt and DeWitt, (1973).
- [38] K.S. Cheng, Z.G. Dai, D.M. Wei et T. Lu, *Is GRO J1744-28 a Strange Star ?*, Science, **280**, 407 (1998).
- [39] G. B. Cook, *Initial Data for Numerical Relativity*, Living Rev. Rel., **3**, 5 (2000).
- [40] G.B. Cook, *Corotating and irrotational binary black holes in quasicircular orbits*, Phys. Rev. D, **65**, 084003 (2002).
- [41] G.B. Cook et H. Pfeiffer, *Excision boundary conditions for black-hole initial data* Phys. Rev. D, **70**, 104016 (2004).
- [42] G. B. Cook, S. L. Shapiro, et S. A. Teukolsky, *Rapidly rotating neutron stars in general relativity : Realistic equations of state*, Astrophys. J., **424**, 823, (1994).
- [43] G. B. Cook, S. L. Shapiro, et S. A. Teukolsky, *Testing a simplified version of Einstein's equations for numerical relativity*, Phys. Rev. D, **53**, 5533 (1996).
- [44] G.B. Cook et J.W. York, *Apparent horizons for boosted or spinning black holes*, Phys. Rev. D, **41**, 1077 (1990).
- [45] D. Christodoulou, *Reversible and irreversible transformations in black hole physics*, Phys. Rev. Lett., **25**, 1596 (1970).
- [46] D. Christodoulou et R. Ruffini, *Reversible transformations of a charged black hole*, Phys. Rev. D, **4**, 3352 (1971).
- [47] C. Cutler et E.E Flanagan, *Gravitational waves from merging compact binaries : How accurately can one extract the binary's parameters from the inspiral waveform ?* Phys. Rev. D **49**, 2658 (1994).
- [48] S. Dain, *Trapped surfaces as boundaries for the constraint equations*, Class. Quantum Grav., **21**, 555 (2004).

- [49] S. Dain, J.L. Jaramillo et B. Krishnan, *Existence of initial data containing isolated black holes*, Phys. Rev. D, **71**, 064003 (2005).
- [50] T. Damour, E. Gourgoulhon, et P. Grandclément, *Circular orbits of corotating binary black holes : Comparison between analytical and numerical results*, Phys. Rev. D, **66**, 024007 (2002).
- [51] T. Damour, P. Jaranowski, et G. Schäfer, *Determination of the last stable orbit for circular general relativistic binaries at the third post-Newtonian approximation*, Phys. Rev. D, **62**, 044024 (2000).
- [52] S. Detweiler, *Kepler's third law*, dans *Frontiers of Numerical relativity*, Editeurs C.R. Evans, L.S. Finn et D.W. Hobill, page 43, Cambridge Univ. Press (1989).
- [53] M. Dey, I. Bombaci, J. Dey, S. Ray, B.C. Samanta, *Strange stars with realistic quark vector interaction and phenomenological density-dependent scalar potential*, Phys. Lett. B, **438**, 123 (1998).
- [54] O. Dreyer, B. Krishnan, D. Shoemaker et E. Shnetter, *Introduction to isolated horizons in numerical relativity*, Phys. Rev. D, **67**, 024018 (2003).
- [55] M.D. Duez, T.W. Baumgarte, S.L. Shapiro, M. Shibata et K. Uryū, *Comparing the inspiral of irrotational and corotational binary neutron stars*, Phys. Rev. D, **65**, 024016 (2002).
- [56] J.A. Faber, P. Grandclément, et F.A. Rasio, *Mergers of irrotational neutron star binaries in conformally flat gravity*, Phys. Rev. D, **69**, 124036 (2004).
- [57] J. A. Faber, P. Grandclément, F. A. Rasio, et K. Taniguchi, *Measuring Neutron-Star Radii with Gravitational-Wave Detectors*, Phys. Rev. Lett., **89**, 231102 (2002).
- [58] E. Fahri, et R. L. Jaffe, *Strange matter*, Phys. Rev. D, **30**, 2379 (1984).
- [59] E. E. Flanagan et S.A. Hughes, *The basics of gravitational waves theory*, preprint, gr-qc/0501041 (2005).
- [60] J. L. Friedman, K. Uryū, et M. Shibata, *Thermodynamics of binary black holes and neutron stars*, Phys. Rev. D, **65**, 064035 (2002).
- [61] A. Garat et R.H. Price, *Nonexistence of conformally flat slices of the Kerr spacetime*, Phys. Rev. D, **61**, 124011 (2000).
- [62] N. Glendenning, *Strangeness in compact stars and signal of deconfinement*, J. of Phys. G : Nuclear and Particle Physics, **23**, 2013 (1997).
- [63] P. Goldreich et W.H. Julian, *Pulsar electrodynamics*, Astrophys. J., **157**, 869 (1969).
- [64] D. Gondek-Rosińska, T. Bulik, L. Zdunik, E. Gourgoulhon, S. Ray, J. Dey, et M. Dey, *Rapidly rotating compact strange stars*, Astron. Astrophys., **363**, 1005 (2000).
- [65] D. Gondek-Rosińska, E. Gourgoulhon et P. Haensel, *Are rotating strange quark stars good sources of gravitational waves ?*, Astron. Astrophys., **412**, 777 (2003).
- [66] D. Gondek, P. Haensel, et J. L. Zdunik, *Radial pulsations and stability of protoneutron stars*, Astron. Astrophys., **325**, 217 (1997).
- [67] D. Gondek-Rosińska et F. Limousin, en preparation (2005).

- [68] D. Gondek-Rosińska, N. Stergioulas, T. Bulik, W. Kluźniak et E. Gourgoulhon, *Lower limits on the maximum orbital frequency around rotating strange stars*, Astron. Astrophys., **380**, 190 (2001).
- [69] D. Gottlieb et S.A. Orzag, *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*, Society of Industrial and Applied Mathematics, (1977).
- [70] E. Gourgoulhon, *Objets compacts*, Master's degree "Sciences de l'Univers et Technologies spatiales" lectures.
- [71] E. Gourgoulhon, P. Grandclément et S. Bonazzola, *Binary black holes in circular orbits. I. A global spacetime approach*, Phys. Rev. D, **65**, 044020 (2002).
- [72] E. Gourgoulhon, P. Grandclément, K. Taniguchi et J.-A. Marck, et S. Bonazzola, *Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity : Method and tests*, Phys. Rev. D, **63**, 064029 (2001).
- [73] E. Gourgoulhon, P. Haensel et D. Gondek, *Maximum mass instability of neutron stars and weak interaction processes in dense matter*, Astron. Astrophys., **294**, 747 (1995).
- [74] E. Gourgoulhon et J.L. Jaramillo, *A 3+1 perspective on null hypersurfaces and isolated horizons*, preprint, gr-qc/0503113 (2005).
- [75] P. Grandclement, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon et J.A. Marck, *A multi-domain spectral method for scalar and vectorial poisson equations with non-compact sources*, J. Comput. Phys., **170**, 231 (2001).
- [76] P. Grandclément, E. Gourgoulhon et S. Bonazzola, *Binary black holes in circular orbits. II. Numerical methods and first results*, Phys. Rev. D, **65**, 044021 (2002).
- [77] C. Gundlach, *Pseudospectral apparent horizon finders : An efficient new algorithm*, Phys. Rev. D, **57**, 863 (1998).
- [78] P. Haensel, *Recent progress in condensed matter physics*, dans *Physical process in astrophysics*, Lecture note in Physics 458, eds. I.W. Roxburgh, J.L. Masnou, Springer-Verlag (Berlin) (1995).
- [79] P. Haensel, *Equation of State of Dense Matter and Maximum Mass of Neutron Stars*, dans *Final Stages of Stellar Evolution*, édité par J.-M. Hameury et C. Motch, EAS Publications Series vol. 7, 249 (EDP Sciences, Les Ulis, 2003).
- [80] P. Haensel, J.L. Zdunik, et R. Schaeffer, *Strange quark stars*, Astron. Astrophys., **160**, 121 (1986).
- [81] J.B. Hartle, *Bounds on the mass and moment of inertia of non-rotating neutron stars*, Phys. Rep., **46**, 201 (1978).
- [82] S.W. Hawking, *Gravitationally collapsed objects of very low mass*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **152**, 75 (1971).
- [83] S.W. Hawking, *Gravitational radiation : the theoretical aspect*, Contemp. Phys., **13**, 273 (1972).
- [84] S.W. Hawking, *The event horizon*, dans *Black holes, les astres occlus*, Eds. C. DeWitt et B.S. DeWitt, Gordon and Breach, New-York (1973).

- [85] J. Hough, S. Rowan et B.S. Sathyaprakash, *The search for gravitational waves*, Journal of Physics B, **38**, Issue 9, 497 (2005).
- [86] R.A. Hulse et J.H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*, Astrophys. J., **195**, 51 (1975).
- [87] J. A. Isenberg, *Waveless approximation theories of gravity*, preprint, University of Maryland, unpublished (1978).
- [88] J. Isenberg et J. Nester, *Canonical Gravity*, dans *General Relativity and Gravitation*, édité par A. Held (Plenum, New York, 1980), Vol. 1.
- [89] J.L. Jaramillo, E.ourgoulhon et G.A. Mena Marugán, *Inner boundary conditions for black hole initial data derived from isolated horizons*, Phys. Rev. D, **70**, 124036 (2004).
- [90] V. Kalogera, C. Kim, D. R. Lorimer et al. *The Cosmic Coalescence Rates for Double Neutron Star Binaries*, Astrophys. J., **601**, 179 (2004).
- [91] W. Kley et G. Schäfer, *Relativistic dust disks and the Wilson-Mathews approach*, Phys. Rev. D, **60**, 027501 (1999).
- [92] C. S. Kochanek, *Coalescing binary neutron stars*, Astrophys. J., **398**, 234 (1992).
- [93] D. Lai, F. Rasio et S.L. Shapiro, *Hydrodynamic instability and coalescence of binary neutron stars*, Astrophys. J., **420**, 811 (1994).
- [94] X.D. Li, I. Bombaci, M. Dey, J. Dey et E. P. J. van den Heuvel *Is SAX J1808.4-3658 a Strange Star ?*, Phys. Rev. Lett., **83**, 3776 (1999).
- [95] A. Lichnerowicz, *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, J. Math. Pures et Appl., **23**, 37 (1944).
- [96] F. Limousin, D. Gondek-Rosinska et E.ourgoulhon, *Last orbits of binary strange quark stars*, Phys. Rev. D, **71**, 064012 (2005).
- [97] J.A. Lobo, *The detection of Gravitational Waves*, Proceedings of the ERE-2001, Madrid 2001, Springer, 33 pages, gr-qc/0202063 (2002).
- [98] <http://www.lorene.obspm.fr/>
- [99] D. R. Lorimer, *Binary and Millisecond Pulsars at the New Millennium*, Living Rev. Relativity, **4**, 5 (2001).
- [100] J. Madsen, *Physics and Astrophysics of Strange Quark Matter*, Lect. Notes Phys., **516**, 162 (1999).
- [101] P. Marronetti, M. D. Duez, S. L. Shapiro, et T. W. Baumgarte, *Dynamical Determination of the Innermost Stable Circular Orbit of Binary Neutron Stars*, Phys. Rev. Lett., **92**, 141101 (2004).
- [102] P. Marronetti, G. J. Mathews, et J. R. Wilson, *Irrotational binary neutron stars in quasiequilibrium*, Phys. Rev. D, **60**, 087301 (1999).
- [103] D. Maxwell, *Solutions of the Einstein constraint equations with apparent horizon boundary*, Commun. Math. Phys., **253**, 561 (2004).

- [104] M. Miller, *Circular orbit approximation for binary compact objects in general relativity*, Phys. Rev. D, **69**, 124013 (2004).
- [105] M. Miller, P. Gressman et W.M. Suen, *Towards a realistic neutron star binary inspiral : Initial data and multiple orbit evolution in full general relativity*, Phys. Rev. D, **69**, 064026 (2004).
- [106] C.W. Misner, *Gravitational Field Energy and  $g_{00}$* , Phys. Rev., **130**, 1590 (1963).
- [107] C.W. Misner, K.S. Thorne et J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, San Fransisco (1973).
- [108] T. Mora et C.M. Will, *Post-Newtonian diagnostic of quasiequilibrium binary configurations of compact objects*, Phys. Rev. D, **69**, 104021 (2004).
- [109] T. Nakamura, K. Oohara et Y. Kojima, *General relativistic collapse to black holes and gravitational waves from black holes*, Prog. Theor. Phys. Suppl., **90**, 1 (1987).
- [110] R. Oechslin, K. Uryū, G. Poghosyan, et F.K. Thielemann, *The influence of quark matter at high densities on binary neutron star mergers*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **349**, 1469 (2004).
- [111] K. Oohara et T. Nakamura, *3D General Relativistic Simulations of Coalescing Binary Neutron Stars*, Prog. Theor. Phys. Suppl., **136**, 270 (1999).
- [112] J.R. Oppenheimer et G. Volkoff, *On massive neutron cores*, Phys. Rev., **54**, 540 (1939).
- [113] P.C. Peters, *Gravitational radiation and the motion of two point masses*, Phys. Rev., **136**, B1224 (1964).
- [114] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965).
- [115] R. Penrose, *Gravitational collapse : the role of general relativity*, Nuovo Cimento, **1**, 252 (1969).
- [116] F.A.E. Pirani, Acta Phys. Pol., **15**, 389 (1956).
- [117] M.J. Rees, *Astrophysical evidence for black holes*, dans *Black holes and relativistic stars* édité par R.M. Wald, page 166, Chicago press (1998).
- [118] C.E. Rhoades et R. Ruffini, *Maximum mass of a neutron star*, Phys. Rev. Lett., **32**, 324 (1974).
- [119] M. Salgado, S. Bonazzola, E. Gourgoulhon, P. Haensel, *High precision rotating neutron stars models*, Astron. Astrophys., **291**, 155 (1994).
- [120] G. Schäfer et A. Gopakumar, *Minimal no-radiation approximation to Einstein's field equations*, Phys. Rev. D, **69**, 021501 (2004).
- [121] E. Schnetter, *Finding apparent horizons and other 2-surfaces of constant expansion*, Class. Quantum Grav., **20**, 4719 (2003).
- [122] B.F. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge University Press, (1985).
- [123] M. Shibata, *3D Numerical Simulation of Black Hole Formation Using Collisionless Particles — Triplane Symmetric Case—*, Progress of Theoretical Physics, **101**, 1199 (1999).

- [124] M. Shibata et T. Nakamura, *Evolution of three-dimensional gravitational waves : Harmonic slicing case*, Phys. Rev. D, **52**, 5428 (1995).
- [125] M. Shibata, K. Taniguchi, et K. Uryū, *Merger of binary neutron stars of unequal mass in full general relativity*, Phys. Rev. D, **68**, 084020 (2003).
- [126] M. Shibata, K. Taniguchi et K. Uryū, *Merger of binary neutron stars with realistic equations of state in full general relativity*, Phys. Rev. D **71**, 084021 (2005).
- [127] M. Shibata et K. Uryū, *Simulation of merging binary neutron stars in full general relativity :  $\gamma=2$  case*, Phys. Rev. D, **61**, 064001 (2000).
- [128] M. Shibata et K. Uryū, *Computation of gravitational waves from inspiraling binary neutron stars in quasiequilibrium circular orbits : Formulation and calibration*, Phys. Rev. D, **64**, 104017 (2001).
- [129] M. Shibata, K. Uryū et J.L. Friedman, *Deriving formulations for numerical computation of binary neutron stars in quasicircular orbits*, Phys. Rev. D, **70**, 044044 (2004).
- [130] P.O. Slane, D.J. Helfand et S.S. Murray, *New Constraints on Neutron Star Cooling from Chandra Observations of 3C 58*, Astrophys. J., **571**, 45 (2002).
- [131] N. Stergioulas, W. Kluźniak et T. Bulik, *Keplerian frequencies and innermost stable circular orbits of rapidly rotating strange stars*, Astron. Astrophys., **352**, 116 (1999).
- [132] K. Taniguchi et E. Gourgoulhon, *Equilibrium sequences of synchronized and irrotational binary systems composed of different mass stars in Newtonian gravity*, Phys. Rev. D, **65**, 044027 (2002).
- [133] K. Taniguchi et E. Gourgoulhon, *Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity. III. Identical and different mass stars with  $\gamma=2$* , Phys. Rev. D, **66**, 104019 (2002).
- [134] K. Taniguchi et E. Gourgoulhon, *Various features of quasiequilibrium sequences of binary neutron stars in general relativity*, Phys. Rev. D, **68**, 124025 (2003).
- [135] K. Taniguchi, E. Gourgoulhon, et S. Bonazzola, *Quasiequilibrium sequences of synchronized and irrotational binary neutron stars in general relativity. II. Newtonian limits*, Phys. Rev. D, **64**, 064012 (2001).
- [136] J. Thornburg, *Finding apparent horizons in numerical relativity*, Phys. Rev. D, **54**, 4899 (1996).
- [137] K.S. Thorne, *Disk-accretion onto a black hole. II. Evolution of the hole*, Astrophys. J., **191**, 507 (1994).
- [138] R. Turolla, S. Zane et J.J. Drake, *Bare Quark Stars or Naked Neutron Stars ? The Case of RX J1856.5-3754*, Astrophys. J., **603**, 265 (2004).
- [139] K. Uryū et Y. Eriguchi, *New numerical method for constructing quasiequilibrium sequences of irrotational binary neutron stars in general relativity*, Phys. Rev. D, **61**, 124023 (2000).
- [140] K. Uryū, F. Limousin, M. Shibata, E. Gourgoulhon et J. Friedman, *Binary neutron stars in a waveless approximation*, preprint, gr-qc/0511136 (2005).

- [141] K. Uryū, M. Shibata, et Y. Eriguchi, *Properties of general relativistic, irrotational binary neutron stars in close quasiequilibrium orbits : Polytropic equations of state*, Phys. Rev. D, **62**, 104015 (2000).
- [142] R.M. Wald, *General relativity*, University Chicago Press, (1984).
- [143] J. Weber, *Detection and Generation of Gravitational Waves*, Phys. Rev., **117**, 306 (1960).
- [144] F. Weber, *Pulsars as Astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*, High Energy Physics, Cosmology and Gravitation Series, IOP Publishing, Bristol, Grande Bretagne (1999).
- [145] F. Weber, *Strangeness in neutron stars*, Journal of Physics G, **27**, 465 (2001).
- [146] F. Weber, *Strange quark matter and compact stars*, Prog. Part. Nucl. Phys., **54**, 193 (2005).
- [147] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley & Sons, New-York (1972).
- [148] J.T. Whelan, C. Beetle, W. Landry et R.H. Price, *Radiation-balanced simulations for binary inspiral*, Class. Quantum Grav., **19**, 1285 (2002).
- [149] J.R. Wilson et G.J. Mathews, *Relativistic Hydrodynamics*, dans *Frontiers in numerical relativity*, édité par C.R. Evans, L.S. Finn et D.W. Hobill, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1989).
- [150] J.R. Wilson et G.J. Mathews, *Instabilities in Close Neutron Star Binaries*, Phys. Rev. Lett., **75**, 4161 (1995).
- [151] J.R. Wilson, G.J. Mathews et P. Marronetti, *Relativistic numerical model for close neutron-star binaries*, Phys. Rev. D, **54**, 1317 (1996).
- [152] E. Witten, *Cosmic separation of phases*, Phys. Rev. D, **30**, 272 (1984).
- [153] R.X. Xu, *1E 1207.4-5209 : a low-mass bare strange star ?*, Mon. Not. R. Astron. Soc., **356**, 359 (2005).
- [154] R.X. Xu, G.J. Qiao et B. Zhang, *PSR 0943+10 : a bare strange star ?*, Astrophys. J., **522**, Issue 2, 109 (1999).
- [155] D.G. Yakovlev, A.D. Kaminger, P. Haensel et O.Y. Gnedin, *The cooling star in 3C 58*, Astron. Astrophys., **389**, 24 (2002).
- [156] J.W. York, *Role of Conformal Three-Geometry in the Dynamics of Gravitation*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1082 (1972).
- [157] J.W. York, J. Math. Phys., **14**, 456 (1973).
- [158] J.W. York, *Kinematics and dynamics of general relativity*, dans *Sources of Gravitational Radiation*, édité par L. Smarr, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1979).
- [159] J.W. York, *Energy and momentum of the gravitational field*, Essays in General Relativity, a Festschrift for Abraham Taub, page 39, Academic Press (1980).
- [160] J. L. Zdunik, *Strange stars - linear approximation of the EOS and maximum QPO frequency*, Astron. Astrophys., **359**, 311 (2000).



## BIBLIOGRAPHIE

---

- [161] J.L. Zdunik, P. Haensel, D. Gondek-Rosińska, et E. Gourgoulhon, *Innermost stable circular orbits around strange stars and kHz QPOs in low-mass X-ray binaries*, *Astron. Astrophys.*, **356**, 612 (2000).